51x)

115

N[illegible]

Ma.
0
102a

Anleitung

zur

Elementar-Arithmetik

von

Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Bayerischem Hofrathe, Rector des königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt a. M., der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, der Herzoglich Sachsen-Gothaischen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreißigacker, und des Vereins für Kunst und Literatur zu Mainz.

Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage.

Frankfurt am Main.

Verlag von G. F. Kettembeil.

1841.

Anleitung

zur

Elementar-Arithmetik

von

Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Bayerischem Hofrathe, Rector des königl. Lyceums zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde, der kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn, der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft zu Frankfurt a. M., der Gesellschaft zur Beförderung nützlicher Künste und deren Hülfswissenschaften daselbst, der Herzoglich Sachsen-Gotha'schen und Meiningischen Societät der Forst- und Jagdkunde zu Dreißigacker, und des Vereins für Kunst und Literatur zu Mainz.

K.B.C.S.B.V. MÜNCHEN

Preis: ungebunden 38 kr.

Erster Theil.

Niedere Elementar-Arithmetik.

Sechste, verbesserte und vermehrte Auflage.

Frankfurt am Main.
Verlag von G. F. Kettembeil.
1841.

Druck von Aug. Osterrieth
in Frankfurt a. M.

Den

lehrbegierigen Zöglingen

der

lateinischen Schulen

des

Königreichs Bayern

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorwort

zur sechsten Auflage.

Vor dem Abdrucke dieser neuen Auflage ist die Schrift einer sorgfältigen Revision unterworfen worden. Dem Texte wurden, ohne die Zahl der §§. zu ändern, mehrfache, theils kleinere theils größere Verbesserungen einverleibt. Zu letztern gehört die dem §. 138. beigefügte Begründung der Regeln über das Auffinden eines gemeinschaftlichen Maßes mehrerer Zahlen, welche Manchem willkommen seyn wird.

Außerdem sind nicht wenige fehlerhafte Citate verbessert worden, wodurch diese nunmehr als vollkommen correct erscheinen werden.

Aschaffenburg, im October 1841.

Der Verfasser.

Vorwort

zur ersten Auflage.

Wenn ich die Menge der bereits vorhandenen arithmetischen Schriften mit einem neuen Buche vermehre, so glaube ich verbunden zu seyn, die Ursachen anzugeben, welche mein Unternehmen rechtfertigen.

Ich würde dem entschiedenen Werthe mehrerer Anleitungen zur Arithmetik zu nahe treten, wenn ich behaupten wollte, sie leisteten Dasjenige nicht, was sie nach dem besondern Plane ihrer Verfasser leisten sollen; allein selbst dieser Plan kann aus doppeltem Gesichtspuncte betrachtet werden.

Einige schrieben fast ganz allein für das practische Rechnen. Es war ihnen mehr darum zu thun, Regeln zu geben, welche der Anfänger befolgen muß, um die im gemeinen Leben am häufigsten vorkommenden Rechnungsfälle aufzulösen, als diese Regeln selbst immer auf strenge und dabei faßliche Art zu beweisen.

Andere machten es sich zum Gesetze, die einzelnen Materien des arithmetischen Lehrgebäudes mit mathematischer Strenge darzustellen, und so die

Arithmetik in ein zusammengedrängtes System zu bringen; allein sie wurden durch ihren oft allzu abstracten Vortrag den Anfängern unverständlich, deren Belehrung sie doch zum Zwecke hatten.

Soll also ein arithmetisches Handbuch für Anfänger den Lernenden jenen Vortheil gewähren, welchen sie aus dem Studium dieses Theiles der Mathematik schöpfen können, d. h. sollen die Anfänger nicht nur rechnen lernen, sondern auch mit Einsicht und Ueberzeugung rechnen: so darf der Vortrag weder zu gedrängt und abstract seyn, um die Fassungskräfte der Lernenden nicht zu übersteigen, oder ihre Lernbegierde abzuschrecken; noch dürfen hierbei Sätze eingemengt werden, von deren Richtigkeit sich dieselben durch faßliche Beweise nicht überzeugen können.

Mein Bemühen war daher bei den folgenden Anfangsgründen hauptsächlich darauf gerichtet, Gründlichkeit mit Faßlichkeit zu verbinden und die einzelnen Lehren so darzustellen, daß keine dieser beiden Eigenschaften der andern einigen Abbruch thun möchte. Zugleich bestrebte ich mich, solche Rechnungen weitläufiger darzustellen, welche in dem gemeinen Leben von entschiedenem practischen Nutzen sind.

Auch dehnte ich mich deßhalb nicht über alle Gegenstände aus, welche andere Schriftsteller gewöhnlich in dergleichen Anfangsgründen abzuhandeln pflegen, weil ich nur für die ersten Anfänger schrieb,

welchen diese Anleitung zur Grundlage dienen kann, worauf sie ein erweitertes Studium der Arithmetik mit desto größerm Nutzen bauen können.

Es scheint mir überflüssig, alle Sätze besonders anzuführen, welche ich auf strengere oder faßlichere Art dargestellt zu haben glaube, indem dieselben dem sachkundigen Leser ohnehin nicht entgehen werden.

Sollte es mir übrigens gelungen seyn, daß diese Anfangsgründe den Beifall unpartheiischer Sachverständigen erhielten, so würde eine Anleitung zur Geometrie, nach ähnlichem Plane entworfen, bald nachfolgen. *)

---

*) Diese, inzwischen erschienenen, Schriften sind:

1. Geometrische Anschauungslehre. Mit 8 Steintafeln. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Mainz, bei Flor. Kupferberg. 1839. XXIV. u. 178 S. 8.
2. Geometrische Wissenschaftslehre. Mit 6 Steintafeln. Dritte Auflage. Ebendaselbst. 1825.
3. Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre. Mit 8 Steintafeln. Ebendaselbst. 1820.

Zur zweiten Auflage.

Der Herr Verleger meiner Anleitung zur Arithmetik für Anfänger hat mich um Besorgung einer neuen Auflage dieser Schrift ersucht. Das mathematische Publicum empfängt dieselbe hiermit nicht nur vielfach verbessert, sondern auch dergestalt vermehrt, daß aus einem Bändchen nunmehr zwei geworden sind.

Es hat mir zweckmäßig geschienen, die Elementar-Arithmetik in die niedere und höhere abzutheilen. Zu jener rechne ich die Lehre von den Zahlen überhaupt, von den ganzen Zahlen, von den Decimalbrüchen, von den benannten Zahlen, von den gemeinen Brüchen, und von den Verhältnissen und Proportionen. Diese aber enthält die entgegengesetzten Zahlen, die Buchstabenrechnung, die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel, die Progressionen und die Logarithmen.

Diese Eintheilung habe ich nicht aus Neuerungssucht, sondern in der Ueberzeugung aufgestellt, daß mit der Lehre von den entgegengesetzten Zahlen und der Buchstabenrechnung der Anfänger wirklich eine

höhere arithmetische Stufe betritt. Auch begnügen sich sehr viele Schüler schon mit jenem Unterrichte, welchen sie in der niedern Elementar-Arithmetik empfangen haben. Für solche ist das erste Bändchen dieser Schrift hinreichend. Die Zöglinge der gelehrten Schulen aber, so wie Jene, welche sich die Anfangsgründe der gesammten Zahlenlehre aneignen wollen, müssen auch dem zweiten Bändchen ihr Studium widmen.

Da dieses Lehrbuch, bei der ersten Auflage, in sechs Abtheilungen die Lehre von den Zahlen überhaupt, von den ganzen Zahlen, von den benannten Zahlen, von den gebrochenen Zahlen, von den Vergleichungen der Zahlen und von der Ausziehung der Quadratwurzel vorgetragen hatte: so sieht man hieraus die bedeutende Vermehrung, mit welcher es hier erscheint, und ich habe nichts mehr hinzuzufügen, als den Wunsch, daß diese Schrift auch nun wieder den Beifall der Sachverständigen erhalten und bei dem öffentlichen und Privat-Unterrichte recht nützlich werden möge.

Aschaffenburg, im November 1818.

Zur dritten Auflage.

In dieser neuen Auflage erscheint die Schrift nicht nur mehrfach verbessert, sondern auch im Ganzen nicht unbedeutend vermehrt. Eine Vergleichung derselben mit der vorigen Auflage wird dieses im Einzelnen nachweisen.

Möge man hierin das fortgesetzte Streben des Verfassers erkennen, diesem Lehrbuche immer mehr Vollkommenheit zu geben und hierdurch den Beifall jener würdigen Studienvorstände und Lehrer zu ehren, welche sich desselben bei dem öffentlichen und Privat-Unterrichte bedienen. Auch hat der Herr Verleger den seitherigen billigen Preis beibehalten.

Wesentliche Veränderungen, in Bezug auf Inhalt und Form der Darstellung, sind bei sorgfältiger Durchsicht nicht nöthig befunden worden.

Die Zahl der §§. wurde nicht geändert, damit in öffentlichen Lehranstalten die zweite Auflage neben dieser dritten noch bestehen und allmählich durch letztere ersetzt werden könne.

Aschaffenburg, im September 1825.

Zur vierten Auflage.

Durch eine allerhöchste Verordnung Seiner Majestät des Königs vom 5. März 1838 ist die nachfolgende Schrift als Lehrbuch der Arithmetik in den sämmtlichen lateinischen Schulen des Reichs, diesseits des Rheins, allergnädigst bestimmt worden.

Da dieser erweiterte Wirkungskreis des Werkes die Bearbeitung einer neuen Auflage desselben nothwendig gemacht hatte, so mußte dieselbe unverweilt von dem Verfasser unternommen werden.

Daß dieselbe gegenwärtig nicht blos als eine vielfach verbesserte, sondern auch als eine nicht unbedeutend vermehrte erscheint, wird dem aufmerksamen Leser nicht entgehen, welcher dieselbe mit der ihr vorhergegangenen dritten Auflage vergleichet.

Um durch diese neue Auflage die frühern, in Bezug auf den öffentlichen Unterricht, nicht unbrauchbar zu machen, ist die Zahl der §§. beibehalten worden. Auch wurde der Preis auf das billigste bestimmt, um den öffentlichen und Privatschülern, welche nach diesem Werkchen unterrichtet werden, dessen Anschaffung möglichst zu erleichtern.

Möge die Schrift in dieser neuen Gestalt reichliche Früchte tragen!

Aschaffenburg, im August 1838.

Zur fünften Auflage.

Da sich die vierte Auflage dieses Lehrbuchs vor Ablauf eines Jahres vergriffen hatte, so ist, nach Antrag des Herrn Verlegers, die Besorgung einer neuen nöthig geworden, welche hierbei folgt.

Der Verfasser hat sich bemüht, nicht nur die Druckfehler der vorigen Auflage zu beseitigen, sondern auch, durch mancherlei kleine Verbesserungen des Textes, dieser Schrift ein höheres Maß von Brauchbarkeit zu verleihen.

Damit diese neue Auflage ohne alle Störung neben der vorigen bestehen kann, ist in Bezug auf die Zahl der §§. keine Abänderung eingetreten.

Aschaffenburg, im Mai 1839.

Inhalt des ersten Theils.

Einleitung.

	Seite
Begriff und Haupttheile, Methode, Nutzen der Mathematik	1 bis 12

Erste Abtheilung.

Von den Zahlen überhaupt . . . . 15 — 30

Zweite Abtheilung.

Von den ganzen Zahlen . . . . 31 — 69

Dritte Abtheilung.

Von den Decimalbrüchen . . . . 70 — 102

Vierte Abtheilung.

Von den benannten Zahlen . . . . 103 — 121

Fünfte Abtheilung.

Von den gemeinen Brüchen . . . . 122 — 161

Sechste Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen . . . . 162 — 247

Einleitung.

Der Zweck dieser Einleitung ist eine kurze Entwickelung des Begriffs und der Haupttheile; der Methode und des Nutzens der Mathematik, in Bezug auf das Bedürfniß der ersten Anfänger.

I. Begriff und Haupttheile.

Unter der Mathematik oder Größenlehre versteht man die wissenschaftliche Lehre von den Größen. Ihre Aufgabe ist, dieselbe durch Erklärungen genau zu bestimmen, nach scharfem Verhältnisse zu vergleichen und auf höchst mannigfaltige Weise zur Erreichung bestimmter Zwecke anzuwenden.

Was die Größe eigentlich sei, kann nicht streng erklärt werden; denn ihr Begriff ist ein einfacher, welcher sich, bei der allmähligen Entwickelung des Geistes, in jedem Menschen mit großer Klarheit erzeugt. Zur Erläuterung kann man sagen, die Größe sei alles Dasjenige, was sich vermehren oder vermindern läßt; z. B. eine Zahl, eine Linie, ein Gewicht, eine Kraft u. s. w., indem sowohl Zahlen als Linien, sowohl Gewichte als Kräfte u. s. f. größer und kleiner gedacht werden können.

Man kann die Größe entweder bloß an sich, d. h. bloß in Gedanken betrachten; oder so, wie sie an

wirklichen Gegenständen der Natur oder der Kunst erscheint. Jene Betrachtung heißt eine reine, diese eine angewandte. Daher zerfällt das große Gebiet der mathematischen Lehre in zwei Haupttheile, welche man die reine und angewandte Mathematik nennt. Die Betrachtung der Zahl 8, als eine Menge von 8 gleichartigen Dingen überhaupt; oder der Linie, als bloße Ausdehnung in die Länge; des Dreiecks, als eines dreiseitigen Flächenraums u. s. w. gehört in die reine Mathematik. Eine Zahl von 12 Gulden; eine gerade Linie, als Höhe eines Thurmes; eine dreieckige Figur auf dem Felde, als Wiese, Acker u. s. w. gehört aber zur angewandten Mathematik. Die Berechnung des Inhaltes eines von vier geraden Linien eingeschlossenen, bloß gedachten Vierecks ist Gegenstand der reinen; die Flächenberechnung eines viereckigen Grundstücks auf dem Felde aber Gegenstand der angewandten Mathematik u. s. w.

Hieraus ist von selbst klar, daß die reine Mathesis, bei dem wissenschaftlichen Studium der Größenlehre, der angewandten vorhergehen müsse, da sich jene zu dieser, wie die Theorie zur Praxis verhält.

Die reine Mathematik hat wieder zwei große Abtheilungen, welche man die Arithmetik oder Zahlenlehre, und die Geometrie oder Raumlehre nennt. Die Größe überhaupt ist nämlich entweder eine unstetige, d. h. eine solche, deren Natur nur von der Menge ihrer Theile; nicht aber von der Art ihrer Verbindung zu einem Ganzen abhängt. Dergleichen Größen sind die Zahlen. Denn ihr Werth wird bloß durch die Menge ihrer Einheiten bestimmt, wobei man gar nicht auf die Ordnung in ihrer Verbindung sieht. Oder die Größen sind von der Art, daß man vorzüglich auf die Art zu sehen hat, wie die Theile zum Ganzen verbunden

sind. Diese Theile hängen so innig zusammen, daß sie ein stetig fortschreitendes Ganzes bilden. Solche Größen heißen stetige. Linien, Flächen und Körperräume erläutern dieses. — Die Zahl von zwölf Menschen bleibt immer dieselbe, sie mögen in gerader Richtung, oder im Kreise, oder ganz unregelmäßig sich neben einander befinden. Daher kommt es bei ihrer Zahl lediglich auf die Menge und nicht auf die Art ihres Nebeneinanderseyns an. Eine gerade Linie hört aber auf, das zu seyn, was sie ist, wenn man dieselbe in Gedanken in Stücke zertheilt und diese Theile nach anderer Ordnung neben einander stellt. Denn die Natur der Linie besteht in dem ununterbrochenen, lückenlosen Zusammenhange der Theile zum Ganzen.

Die Arithmetik oder Zahlenlehre ist daher jener Theil der Mathematik, welcher sich mit den unstetigen Größen (d. h. mit den Zahlen); die Geometrie oder Raumlehre aber jener Haupttheil, welcher sich mit den stetigen Größen (d. h. mit den Raumgrößen) beschäftigt.

Hieraus ersieht man auch, daß es sowohl eine reine und angewandte Zahlenlehre, als auch eine reine und angewandte Raumlehre gebe. Die Worte: theoretische und practische Rechenkunst; theoretische und practische Geometrie bezeichnen eben diese Abtheilungen.

Die angewandte Mathematik läßt sich füglich in vier Haupttheile fassen, welche man die mechanischen, optischen, astronomischen und technischen Wissenschaften nennt.

Die mechanischen Wissenschaften beschäftigen sich mit Bestimmung der Größe und des Verhältnisses der Kräfte in der Natur und Kunst, und lehren, wie man dieselbe benutzen kann, um bestimmte Zwecke zu erreichen.

Unter Kraft versteht man dasjenige, was eine Bewegung hervorbringt, oder eine solche hemmt; z. B. die Stromkraft, welche das Schiff fortbewegt; oder der Widerstand des Ankers, der seine Bewegung hemmt. Dahin gehört z. B. die Statik, d. h. die Lehre vom Gleichgewichte fester Körper; die Mechanik, d. h. die Lehre von der Bewegung fester Körper durch Maschinen; die Hydrostatik, d. h. die Lehre vom Gleichgewichte liquider Körper; die Hydraulik, d. h. die Lehre von der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten u. a. m.

In den optischen Wissenschaften werden die Erscheinungen, welche das Licht zeigt, nach ihrer Gesetzmäßigkeit bestimmt und von diesen Gesetzen sehr viele Anwendungen auf Gegenstände der Natur und der Kunst gemacht. Unter dem Lichte versteht man aber dasjenige, was uns die körperlichen Dinge sichtbar macht. Die Optik, im engern Sinne, lehrt die Gesetze des sich geradlinig verbreitenden Lichtes; die Catoptrik untersucht die Gesetze der Zurückwerfung des Lichtes von spiegelnden Oberflächen und die Dioptrik bestimmt die Gesetzmäßigkeit der Brechung des Lichtes, d. h. der Abweichung der Strahlen bei ihrem Uebergange aus einem durchsichtigen Körper in den andern, z. B. aus Luft in Glas, aus Luft in Wasser u. s. w.

Der Gegenstand der astronomischen Wissenschaften ist sowohl die Erde, als jeder sichtbare Himmelskörper; im besondern unsere Sonne, unser Mond, die Planeten, die Fixsterne und die Cometen. Ihre Aufgabe ist, alles Meßbare, z. B. die Größe, die Gestalt, die Abstände, die Gesetze der Bewegungen u. s. f. der himmlischen Körper zu bestimmen, und ihre physische Natur, soviel dieses möglich ist, kennen zu lernen.

Zu den technischen Wissenschaften gehören alle jene, welche, außer den Lehren der Physik und Chemie, zu ihrer

Vollkommenheit mancherlei mathematische Hülfssätze bedürfen. Sie gehen meist aus der Verbindung dieser Naturwissenschaften und der Größenlehre hervor. Die bürgerliche Baukunst, die Kriegsbaukunst, die Artillerie, die Schiffsbaukunst, die Steuermannskunst, und mehrere andere, gehören hieher.

II. Methode.

Unter der mathematischen Methode versteht man jene, den Mathematikern eigene Art und Weise, ihre Lehren zu begründen und darzustellen. In ihr erblickt man das Bild und Muster einer streng wissenschaftlichen Methode. Sie beginnt mit Erklärungen, aus welchen Grundsätze abgeleitet werden. Auf diese folgen Lehrsätze und Aufgaben, welche in Zusätzen und Anmerkungen theils erweitert, theils erläutert werden. Auch bedienen sich die Mathematiker bisweilen der willkührlichen Sätze und der Lehnsätze.

Eine Erklärung ist die vollständige Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs. Sie dient zur Aufklärung dieser Begriffe und bildet die Grundlage des wissenschaftlichen Gebäudes. Die Sätze: eine Zahl ist die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Gegenstände; oder: das geradlinige Dreieck ist eine von drei geraden Linien begränzte Ebene, sind Beispiele von Erklärungen.

Diese Erklärungen sind entweder Wort-Erklärungen, wenn man bloß den Begriff bestimmt, welchen man mit einem gewissen Worte verbindet, ohne die wirkliche, streng erwiesene Entstehung des, diesem Begriffe entsprechenden Gegenstandes nachzuweisen: z. B. das Quadrat ist ein Viereck von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln; wodurch nur bemerkt wird, was für ein Viereck

man unter dem Worte: Quadrat zu verstehen habe, ohne überzeugt zu seyn, daß auch wirklich ein solches Viereck wissenschaftlich gebildet werden könne. Oder diese Erklärungen sind Sach-Erklärungen, d. h. solche, woraus man zugleich die Entstehung des erklärten Gegenstandes mit voller Ueberzeugung erkennt; z. B. ein Bruch ist eine Zahl, welche entsteht, wenn man irgend ein Ganzes in willkührlich viele gleiche Theile theilt, und von diesen Theilen einige zu einem neuen Ganzen verbindet; oder: die Kreislinie ist jene krumme Linie, welche der eine Endpunct einer geraden Linie beschreibt, die sich in der nämlichen Ebene um den andern, immer fest bleibenden Endpunct einmal ganz und gar herum bewegt.

Aus dieser wesentlichen Verschiedenheit der Erklärungen kann leicht nachgewiesen werden, daß nur die Sach-Erklärungen einen wissenschaftlichen Werth haben. Die Sacherklärungen werden auch Realdefinitionen, die Worterklärungen aber Nominaldefinitionen genannt.

Grundsätze überhaupt sind jene Sätze, welche, ihrer Einfachheit wegen, von selbst einleuchten, sobald man nur ihren Sinn versteht. Sie bedürfen daher, zur Erkenntniß ihrer Wahrheit, keines besondern Beweises. Man theilt sie in Axiome, welche Behauptungen enthalten, und in Postulate, welche Foderungen aussprechen. Die Sätze: jede Größe ist sich selbst gleich; ein Theil ist kleiner als das Ganze; wenn a so groß wie b, und b so groß wie c ist, so ist auch a so groß wie c, u. s. w. sind Axiome. Aber die Sätze: eine gegebene Zahl größer zu machen; eine gerade Linie über beide Endpuncte zu verlängern u. s. w. sind Postulate oder Foderungen.

Ein Lehrsatz oder Theorem ist ein Satz, welcher eine Behauptung enthält, deren Wahrheit nicht unmittel-

bar für sich selbst schon einleuchtet. So ist der Satz: Wenn man den Zähler und den Nenner eines Bruches mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Bruch an seinem Werthe unverändert, ein Lehrsatz, weil der Grund seiner Wahrheit nicht von selbst schon einleuchtend ist. Zur Vollständigkeit des Lehrsatzes gehört somit noch der Beweis, d. h. die Entwickelung der Gründe, wodurch der Verstand genöthigt wird, der aufgestellten Behauptung seinen Beifall zu schenken.

Der Beweis ist entweder ein directer oder ein indirecter. Bei jenem wird die Wahrheit der Behauptung aus dem innern Zusammenhange von Grund und Folge; bei diesem aber daraus erkannt, daß man nachweiset, das Gegentheil jener Behauptung sei unmöglich. Beide Beweisarten gewähren, wenn sie richtig geführt sind, eine gleichvollkommne Ueberzeugung; doch hat der directe Beweis, in Bezug auf die innere Einsicht in die Verkettung der Wahrheiten, vor dem indirecten Beweise einigen Vorzug. Jener heißt auch der ostensive, dieser der apagogische. Wenn sich z. B. der Beweis über die Gleichheit zweier geraden Linien darauf gründet, daß beide, mit demselbigem Maße gemessen, als Gleichvielfache dieses Maßes erscheinen, so ist er ein directer Beweis. Wird aber ihre Gleichheit daraus erkannt, daß man auf einen Widerspruch kommt, wenn angenommen würde, die erste Linie sei größer oder kleiner, als die zweite, so ist der Beweis indirect.

Aufgaben oder Probleme sind Sätze, welche eine Foderung enthalten, die nicht so einfach ist, daß man ihr unmittelbar für sich selbst schon entsprechen kann. Der Satz: zwei oder mehrere gegebene Brüche unter einerlei Benennung zu bringen, ist eine Aufgabe, da man aus ihrem Sinne noch nicht unmittelbar einsieht, wie dieser

Foderung Genüge geleistet wird. Daher gehört noch zur Aufgabe die Auflösung, d. h. die bestimmte Angabe der Art und Weise, wie man zu verfahren habe, um der Foderung zu entsprechen. Dieser Auflösung muß aber auch der Beweis folgen, d. h. die Zusammenstellung der Gründe, wodurch sich der Verstand von der Richtigkeit der Auflösung überzeugt.

Aus dem Bisherigen wird man leicht einsehen, worin der Lehrsatz mit dem Axiome, die Aufgabe mit dem Postulate übereinstimmt, und worin beide wieder unter sich verschieden sind. Auch wird der Lehrer Alles Dieses mit schicklichen Beispielen zu erläutern wissen, damit den Schülern diese allgemeinen Begriffe recht klar und geläufig werden.

Unter Zusätzen oder Corollarien versteht man alle Sätze, welche aus schon als wahr erkannten Lehren so einfach folgen, daß es keines neuen Beweises für sie bedarf. Sie sind daher leicht verständliche Folgerungen aus früheren Wahrheiten. Nachdem z. B. erwiesen ist, daß ein Bruch 6 mal größer wird, wenn man seinen Zähler, bei unverändertem Nenner, mit 6 multiplicirt, so ist es ein Zusatz, wenn man sagt: Ein Bruch wird mit einer gegebenen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Zähler mit derselben multiplicirt, und den Nenner unter dieses Product setzt. Oder, wenn die Entstehung der Kreislinie aus der Bewegung einer geraden Linie abgeleitet wird, welche sich in der Ebene einmal um ihren einen festbleibenden Endpunct ganz und gar herumdreht, und man sagt nun: In jedem Kreise sind alle aus dessen Mittelpuncte nach dem Umfange gezogene gerade Linien unter sich einander gleich, so ist dieser Satz ebenfalls ein Zusatz. — Daß diese Zusätze auch Foderungen und deren Auflösungen enthalten können, versteht sich hieraus von selbst.

In den Anmerkungen oder Scholien wird Alles Dasjenige vorgetragen, was auf irgend eine Art lehrreich und wissenswürdig; doch aber zum systematischen Vortrage eben nicht gerade nothwendig ist. Dahin gehören z. B. andere Beweise der Lehrsätze, abgeänderte Auflösungen der Aufgaben, Erläuterungen der allgemeinen Lehren durch Beispiele, literärische Notizen jeder Art, u. s. w.

Willkührliche Sätze heißen jene Vorschriften, welche nicht in der Natur der Sache, sondern in dem Einverständnisse der Menschen gegründet sind. Daß wir z. B. in unserer Arithmetik auf zehn zählen, und so nach zehnfach höhern Ordnungen zu Hunderten, Tausenden u. s. w. aufsteigen, ist eine bloß willkührliche Annahme; denn man hätte auch auf acht, auf zwölf u. s. w. zählen können. — Eben so ist es willkührlich, daß jede Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, vermöge dieser Stelle, einen zehnmal größeren Werth erhalte. — Hierbei bemerke man, daß diese Willkühr in einigen Vorschriften der Mathesis die strenge Allgemeinheit und Nothwendigkeit ihrer Lehren nicht aufhebe. Denn die Natur dieser willkührlichen Sätze besteht darin, daß man unter mehreren Fällen, wovon aber einer nothwendiger Weise Statt finden muß, einen solchen wählet, welcher vorzüglich bequem zur Erreichung eines gewissen Zweckes ist. — So ist es z. B. zur Bildung eines brauchbaren Zahlensystems in der Arithmetik durchaus nothwendig, auf irgend eine bestimmte Menge von Einheiten zu zählen, und nach diesem Gesetze die höhern Ordnungen zu bilden; allein ganz willkührlich ist es gewesen, daß man gerade auf zehn gezählt und hierdurch das zehntheilige System in der Arithmetik eingeführt hat. Bloß zufällig scheint aber diese Annahme

deshalb nicht gewesen zu seyn, theils weil zehn auch die Zahl der menschlichen Figur ist, und ein Instinct den Menschen schon antreibt, an den Fingern zu zählen, theils auch weil mancherlei Unbequemlichkeiten entständen, wenn man auf bedeutend größere oder kleinere Zahlen (als zehn) zählen wollte.

Lehnsätze oder Lemmen heißen jene Sätze, welche theils aus einer andern Wissenschaft, theils aus einem andern Theile der nämlichen Wissenschaft entlehnt, und, um dem Vortrage eine größere Vollständigkeit zu geben, in denselben aufgenommen werden. So können z. B. in der Geometrie Lehnsätze aus der Arithmetik, Optik, Astronomie; in der Arithmetik Lehnsätze aus der Geometrie, Landwirthschaft, Forstwissenschaft, u. s. w. vorkommen. Hieraus ersieht man, daß die Lehnsätze nicht zum abgeschlossenen Systeme der mathematischen Wissenschaft, sondern zu mancherlei Anwendungen derselben gehören.

III. Nutzen.

Der vorzügliche Werth der Mathesis geht aus dem wohlthätigen Einflusse hervor, welchen ihr gründliches Studium theils auf die kräftige Bildung des Geistes, theils auf das Wohl des bürgerlichen Lebens äußert. Jenen Nutzen kann man den formalen oder subjectiven, diesen den materialen oder objectiven nennen.

Da die mathematische Lehre mit deutlichen Erklärungen beginnt, so bauet sie hierdurch auf festbestimmte Begriffe und vermeidet Zweideutigkeit und Wortstreit. Aus diesen Erklärungen werden einfache und klare Sätze abgeleitet, welche den Grund ihrer Wahrheit so evident in sich selber tragen, daß sie Jeden überzeugen, sobald er nur ihren Sinn versteht. Diese Grundsätze werden sodann zur fernern

Begründung von Lehrsätzen und Aufgaben dergestalt angewendet, daß kein Satz ohne strenge Nachweisung seiner Wahrheit aufgestellt wird. Der Verstand, welcher diesem systematischen Gange folgt, übt, und verstärkt durch diese Uebung, seine eigene Kraft. Daher ist die Mathesis ein so äußerst wirksames Bildungsmittel des Verstandes; eine Wahrheit, welche zu allen Zeiten allgemein anerkannt worden ist. Wem daher an Deutlichkeit der Begriffe und an Gründlichkeit im Denken etwas gelegen ist, der widme sich mit Ernst und Eifer dieser geiststärkenden Lehre. Doch führt nicht jede Art des Studiums zum hohen Ziele. Aus der Quelle einer klaren Anschauung und der thätigen Verstandeskraft entsprungen, fodert die Mathesis wiederum Beides, sowohl von ihren Lehrern, als auch von den Schülern. Nicht in einem überzeugungslosen Auswendiglernen der Behauptungen und Vorschriften besteht das ächt-mathematische Wissen, sondern in der errungenen Klarheit der Grundbegriffe und in der vollen Ueberzeugung von der Wahrheit der Sätze. Bloßes unthätiges Auffassen mathematischer Lehren erzeuget blinden Mechanismus, den gefährlichsten Feind strenger Wissenschaften. Man sage nicht, die Mathesis bilde den Geist einseitig und der Mathematiker erwerbe sich nur die Fähigkeit, über Gegenstände *seiner* Wissenschaft gründlich zu urtheilen. Denn die Gesetze des richtigen Denkens sind allgemein, und für jedes Denken im Besondern geltend; und der Geist, welcher in mathematischen Verhältnissen gründlich denkt, erhält hierdurch die Fertigkeit, über jedes andere Verhältniß in andern Wissenschaften und im Leben mit Leichtigkeit und Sicherheit zu urtheilen.

Was nun die Mathematik in ihren *Anwendungen* betrifft, so sind dieselben so höchst mannigfaltig, daß man sie hier nicht alle aufzählen kann. Die Unentbehrlichkeit

der practischen Rechenkunst unter den besondern Namen: mercantilische, politische, juristische Arithmetik, und der practischen Feldmeßkunst (niedere und höhere; die Markscheidekunst, das Nivelliren u. s. f.) für das bürgerliche Leben ist Jedermann bekannt. Kein Theil der angewandten Mathematik (Siehe oben II.) ist ohne vielfachen Einfluß auf Künste, Fabrikwesen oder Gewerbe. Die Naturkunde bedarf zu ihrer Vollkommenheit der Mathesis. Den Cameral- und Finanz-Wissenschaften, der Forstwissenschaft, Oeconomie und vielen andern dient sie als unentbehrliche Hülfslehre.

Schon dieses Wenige enthält hinreichende Gründe zur Aufforderung, sich diesem wichtigen Studium mit Ernst und Eifer zu widmen.

Anmerkung. Ausführlicher ist dieser Gegenstand behandelt in meiner soeben erschienenen Schrift: „Encyclopädische Uebersicht der Mathematik, nach Begriff, Methode, Nutzen, Eintheilung und Lehrvortrag derselben. Frankfurt a. M. bei G. F. Kettembeil 1841" VIII. 64 S. 8°. (Preis 18 ggr. od. 36 kr.) Sie enthält folgende Abtheilungen: I. Begriff der Mathematik (§. 1—10). II. Methode und Nutzen der M. (§. 11—19). III. Systematische Entwickelung der Haupt- und Nebentheile der M. (§. 20—78). IV. Lehrvortrag der M. (§. 79—80). V. Eine umfassende Tabelle über diese Haupt- und Nebenabtheilungen der gesammten Mathematik.

Der
Elementar - Arithmetik
Erster Theil.

Die
niedere Elementar-Arithmetik,

oder:

I. Von den Zahlen überhaupt.
II. Von den ganzen Zahlen.
III. Von den Decimalbrüchen.
IV. Von den benannten Zahlen.
V. Von den gemeinen Brüchen.
VI. Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erste Abtheilung.

Von den Zahlen überhaupt.

---

§. 1. Erklärung. Bei Begründung strenger Wissenschaften kommt es vorzüglich auf scharfe Bestimmung der Begriffe an. Denn durch die Begriffe werden die ihnen entsprechenden Gegenstände erkannt. Das Mannigfaltige, aus dessen Verbindung die Natur des Begriffs hervorgeht, nennt man die Merkmale des Begriffs, oder auch die Merkmale des Gegenstandes. Daher kann das Wesen der Begriffe und ihrer Objecte nur durch die Angabe ihrer Merkmale bestimmt werden. Es ist klar, daß hierbei nur von den wesentlichen; nicht aber von bloß zufälligen Merkmalen die Rede seyn kann.

§. 2. Anmerkung. Zur Erläuterung (von §. 1.) ein Beispiel. Wenn man sagt: das Mineral ist ein unorganischer Naturkörper, so sind unorganisch und Naturkörper die Merkmale des Begriffs Mineral. — Auf ähnliche Art findet man in dem Begriffe Pflanze die Merkmale: Naturkörper, organisch, unbeseelt; in dem Begriffe Thier die Merkmale: Naturkörper, organisch, beseelt; in dem Begriffe Mensch die Merkmale: Naturkörper, organisch, beseelt, vernünftig u. s. f. Setzte man nun z. B. dem Begriffe des Menschen noch das Merkmal schwarzhäutig oder kupferfarbig bei, so wären diese Merkmale keine wesentlichen. Nur der Inbegriff der wesentlichen Merkmale, d. h. derjenigen, ohne welche der Gegenstand aufhörte zu seyn, was er ist, bestimmt die Natur der Begriffe und ihrer Gegenstände.

§. 3. Erklärung. Die Merkmale (§. 1.) der Gegenstände sind entweder mehreren mit einander gemein, oder sie kommen nur einigen von ihnen zu und andern nicht. Jene heißen gemeinschaftliche, diese unterscheidende Merkmale.

§. 4. Anmerkung. In §. 2. ist das Merkmal: Naturkörper, in Bezug auf Mineral, Pflanze, Thier und Mensch ein gemeinschaftliches; das Merkmal beseelt aber, in Hinsicht auf Pflanze und Thier, ein unterscheidendes. Ebenso ist das Merkmal vernünftig, in Bezug auf Thier und Mensch, ein unterscheidendes Merkmal u. s. f.

§. 5. Erklärung. Da die Gegenstände sowohl gemeinschaftliche, als unterscheidende Merkmale (§. 3.) haben, so können sie auch in dieser zweifachen Rücksicht mit einander verglichen werden. Man nennt sie gleichartig, oder von einerlei Art, wenn sie nach ihren gemeinschaftlichen; ungleichartig, oder von verschiedener Art, wenn sie nach ihren unterscheidenden Merkmalen betrachtet werden.

§. 6. Anmerkung. Ein Pferd und ein Hirsch haben, als Thiere betrachtet, vollkommen einerlei Merkmale, und sind daher in dieser Rücksicht gleichartig (§. 5.). Aber als Pferd und als Hirsch gehören beide zu verschiedener Art, und sind daher ungleichartig (§. 5.). Desgleichen sind mehrere Deutsche und Franzosen, als Europäer betrachtet, gleichartig; denn sie haben als solche einerlei Merkmale. Wird aber der Deutsche als Bewohner von Deutschland, und der Franzose als Einwohner von Frankreich angesehen, so gehören beide in dieser Rücksicht zu verschiedenen Nationen von Europa, und sind folglich ungleichartige Dinge.

§. 7. Erklärung. I. Die Vorstellung der Vielheit gleichartiger Dinge (§. 5.) heißt eine Zahl im Allgemeinen, und eines von diesen gleichartigen Dingen wird die Einheit genennt. Folglich ist die Zahl überhaupt eine Vielheit von Einheiten. Da aber diese Vielheit bestimmt oder unbestimmt seyn kann, so ist auch die Zahl selbst eine bestimmte oder eine unbestimmte.

II. Zählen (oder eine Zahl bilden) heißt, eine dieser Einheiten in Gedanken zur andern setzen und durch ein Wort der Sprache ausdrücken, wieviele derselben im Ganzen vorhanden sind.

III. Die Zahlenlehre (oder Arithmetik) ist die wissenschaftliche Lehre von den Zahlen. Sie entwickelt ihre Verschiedenheit, gibt ihre Veränderungen an, und zeigt, wie man dieselben zur Erreichung bestimmter Zwecke benützen kann.

§. 8. Anmerkung. I. Wer sich z. B. ein Pferd vorstellt, kann sich diesen Gegenstand auch noch öfter zugleich denken. Hieraus entsteht eine gewisse Vielheit oder Menge, d. h eine Zahl von Pferden, und die Einheit dieser Zahl ist eines der Pferde, welche man sich vorstellt — Ein Deutscher und ein Franzose machen, als solche, d. h. den Deutschen als Deutschen und den Franzosen als Franzosen betrachtet, nicht die Zahl von zwei aus; denn es sind weder zwei Deutsche, noch zwei Franzosen. Allein beide sind doch Enropäer, und nach diesem Merkmale gleichartige Dinge. Daher geben sie zusammen die Zahl von zwei Europäern, und die Einheit dieser Zahl ist ein Europäer. — Die Zahlen sechs, acht, zwölf u. s. w. sind bestimmte; die Zahlen a, b, n, u. dgl. aber unbestimmte Zahlen. Denn unter den Zahlen sechs, acht, zwölf kann man sich nur eine bestimmte Menge von Einheiten denken; da im Gegentheile die Zahl a jede noch unbestimmte Menge dieser Einheiten vorstellen kann. Gleichwie aber a, b, n unter sich verschiedene Buchstaben sind, so bedeuten sie auch unter sich verschiedene Zahlen, d. h. die Zahl a ist eine andere als die Zahl b und als die Zahl n, u s. w.

II. Eine andere Eintheilung der Zahlen ist die in reine und in benannte. Eine Zahl heißt rein, wenn bloß die Menge, nicht aber die Art ihrer Einheiten angegeben ist; z. B. die Zahl fünf. Wird aber, außer der Menge, zugleich noch die Art dieser Einheiten bestimmt, so heißt die Zahl eine benannte oder angewandte; z. B. die Zahl fünf Pfunde, zehn Gulden, zwölf Cubicfuße u. s. w.

III. Nach einer dritten Eintheilung sind die Zahlen entweder ganze Zahlen, welche die Einheit selbst mehrmal enthalten, oder gebrochene Zahlen, welche mehrere Theile der in gleiche Stücke getheilten Einheit enthalten. Die Zahlen vier, acht,

zehn, sind ganze; aber Dreiviertel, Siebenachtel, Neuneilftel u. s. f. gebrochene Zahlen, oder Brüche.

§. 9. Grundsatz. Die Einheiten (§. 7.) aus deren Verbindung eine Zahl (§. 7.) entsteht, müssen gleichartig (§. 5.) seyn. Daher können ungleichartige Dinge nie in eine Zahl zusammengebracht werden. — Dieser Satz ist deshalb ein Grundsatz, weil er den Grund seiner Wahrheit in sich selbst trägt und demnach keines weitern Beweises bedarf.

§. 10. Anmerkung. I. Eine Zahl von acht Deutschen besteht aus acht Einheiten, deren jede ein Deutscher ist. Eben so ist eine Zahl von fünf Franzosen eine Menge von fünf Einheiten, deren jede ein Franzose ist. In beiden Zahlen ist die Einheit verschieden. Daher kann aus ihnen keine einzige dritte Zahl gebildet werden. Nimmt man aber aus beiden das gemeinschaftliche Merkmal: Europäer, so sind dieselben in dieser Rücksicht gleichartig, und geben zusammen eine Zahl von dreizehn Europäern.

II. Daß manche an sich sehr ungleichartige Dinge, z. B. zwölf Gulden und 48 Kreuzer, dennoch in eine einzige Zahl (hier siebenhundert acht und sechzig Kreuzer oder auch zwölf und vierfünftel Gulden) gebracht werden können, hat seinen Grund darin, daß man sowohl die Gulden in Kreuzer, als auch die Kreuzer in Theile von Gulden verwandeln und hierdurch beide unter sich gleichartig machen kann.

§. 11. Grundsatz. Die Zahlen sind Mengen von Einheiten (§. 7.). Nun wird aber diese Menge (bei der unveränderlichen Größe der Einheit) um so größer seyn, je mehr Einheiten vorhanden sind, und um so kleiner, je weniger man derselben zusammennimmt; folglich muß auch diejenige Zahl, welche aus mehreren Einheiten besteht, größer seyn, als eine andere, welche aus wenigern zusammengesetzt ist. Ueberhaupt wird jede Veränderung, welche mit allen Einheiten einer Zahl vorgenommen wird, auch mit dieser Zahl selbst (und umgekehrt) geschehen müssen.

§. 12. Erklärung. Eine Zahl, welche aus mehreren Einheiten besteht, heißt die größere Zahl, in Rücksicht

einer andern, welche aus wenigern Einheiten zusammengesetzt ist. Diese letztere hingegen wird in Bezug auf jene die kleinere Zahl genennt. Gleiche Zahlen sind solche, welche aus gleichvielen Einheiten bestehen. Ungleiche hingegen heißen jene, von welchen die eine größer oder kleiner, als die andere ist.

§. 13. Grundsatz. Der Begriff der Einheit (§. 7.) ist zwar ein bestimmter, unveränderlicher Begriff; allein die Einheit selbst kann bald größer, bald kleiner angenommen werden. So ist z. B. in der Zahl zehn die Einheit Eins; wie groß aber dieses Eins ist, bleibt hierbei noch unbekannt. In dem Bruche Dreiviertel ist diese Einheit Einviertel; in der Zahl zwölf Pfunde ist sie Ein Pfund u. s. f. Für jede practische Anwendung muß die Einheit eine bestimmte Größe haben, welche sich nach dem jedesmaligen Bedürfnisse richtet. So ist z. B. bei dem Vermessen kleiner Grundstücke die Einheit eine Quadratruthe; bei Ausmessung größerer Dorfgemarkungen das Tagwerk; bei der Flächenbestimmung ganzer Provinzen die Quadratmeile u. s. w.

§. 14. Zusatz. Soll also eine Zahl in jeder Rücksicht bestimmt seyn, so kommt es, nebst der Menge ihrer Einheiten, zugleich auch auf die ursprüngliche Größe dieser Einheiten an; denn beides bestimmt erst den genauen Werth der gegebenen Zahl. So ist z. B. die, der Menge der Einheiten nach, größere Zahl von vier und zwanzig Lothen dennoch im Gesammtwerthe kleiner als die aus weniger Einheiten bestehende Zahl von fünf Pfunden.

§. 15. Anmerkung. Hier setzt man zuerst die verschiedene Größe der Einheit ganz außer Augen, und sieht bloß auf die vorhandene Menge derselben. Nimmt man aber, nebst der Menge, auch noch auf die besondere Größe (oder Art) der Einheiten Rücksicht, so entspringt hieraus eine eigene Rechnung (die Rechnung in benannten Zahlen), wovon in der Folge geredet wird.

§. 16. Grundsatz. Alle Veränderungen mit den Zahlen hängen von den Veränderungen mit ihren Einheiten ab (§. 11.). Die Veränderungen, welche aber mit den Einheiten vorgenommen werden können, bestehen darin, daß man Einheiten, welche mit den schon vorhandenen gleichartig sind, denselben zusetzt, oder solche von ihnen hinwegnimmt. Folglich werden auch die Zahlen verändert, indem man ihnen gleichartige Einheiten beifügt, oder Einheiten von ihnen wegnimmt.

§. 17. Erklärung. Einheiten, welche mit jenen, woraus eine Zahl besteht, gleichartig sind, ihr zusetzen, heißt diese Zahl vermehren. Solche Einheiten von ihr wegnehmen, heißt die Zahl vermindern. Vermehren und Vermindern sind daher die zwei Hauptveränderungen, welche man mit den Zahlen im allgemeinen vornehmen kann.

§. 18. Erklärung. Eine Zahl wird vermehrt, indem man ihr neue mit ihr gleichartige Einheiten zusetzt (§. 17.). Eine Zahl ist aber schon eine Menge von Einheiten (§. 7.). Daher wird auch eine Zahl vermehrt, indem man ihr eine oder mehrere andere Zahlen beifügt, welche sowohl unter sich, als mit jener ersten gleichartig sind. Dieses Zusetzen kann nun auf doppelte Art geschehen. Entweder kommen zu der einen Zahl nach und nach andere, welche unter sich ungleich (§. 12.) sind, oder eine und die nämliche Zahl wird mehrmal zu sich selbst gesetzt. Im ersten Fall heißt die Vermehrung durch ungleiche Zahlen mit einem besondern Worte die Addition; im letzten hingegen wird die Vermehrung mit gleichen Zahlen die Multiplication genannt.

§. 19. Anmerkung. I. Wer sich eine Zahl von sechs Einheiten vorstellt, und nun z. B. noch eine andere von acht, eine von fünf, eine dritte von zehn Einheiten ihr zusetzt, und hierdurch

die Zahl neun und zwanzig bildet, vermehrt die angenommene Zahl sechs mit verschiedenen ungleichen Zahlen, d. h. er addirt (§. 18). Wer hingegen die erste Zahl sechs mehrmal, z. B. achtmal, zu sich selbst setzt, und so diese Zahl durch sich selbst vermehrt, wodurch er acht und vierzig erhält, der multiplicirt (§. 18) die sechs mit der Zahl acht.

II. Die Addition und die Multiplication sind demnach nicht wesentlich von einander verschieden. Ihr Unterschied zeigt sich mehr bei der practischen Zifferrechnung, wovon die nächste Abtheilung handelt.

§. 20. Anmerkung. Die Addition und die Multiplication (§. 18.) sind folglich die einzig möglichen Veränderungen der Zahlen in Rücksicht ihrer Vermehrung. (§ 17.)

§. 21. Erklärung. Eine Zahl wird vermindert, wenn man Einheiten, woraus sie besteht, von ihr wegnimmt (§. 17.). Die Zahl wird daher auch dadurch vermindert, daß eine andere (kleinere) Zahl von ihr weggenommen wird. Dieses Hinwegnehmen kann aber wieder auf zweierlei Art geschehen. Entweder nimmt man eine kleinere Zahl von einer größern nur einmal, oder man nimmt sie so oft von ihr weg, als es möglich ist. Jene Veränderung mit der Zahl heißt die Subtraction, diese die Division.

§. 22. Anmerkung I. Man denke sich eine größere Zahl zwölf und eine kleinere vier, und nehme nun von der ersten die letztere einmal hinweg, wodurch die Zahl acht übrig bleibt, so wird jene um so viele Einheiten vermindert, als diese in sich enthält, und diese Art der Verminderung ist die Subtraction (§. 21.). Wird hingegen die kleine Zahl vier von der größern zwölf so oft hinweggenommen, als es geschehen kann, d. h. so oft, bis von dieser letzten entweder nichts, oder weniger übrig bleibt, als die kleine beträgt, so wird diese Verminderung die Division (§. 21.) genennt. Hier kann vier von zwölf gerade dreimal weggenommen werden. Wäre dagegen siebenzehn die größere und sechs die kleinere Zahl, so könnte diese von jener zweimal weggenommen werden und es blieben noch fünf Einheiten übrig, welche die Zahl fünf, und somit eine kleinere als sechs bilden.

II. Subtraction und Division sind demnach ebenfalls nicht wesentlich von einander verschieden. Auch hier wird ihr Unterschied mehr bei der wirklichen Zifferrechnung hervortreten, welche weiter unten folget.

§. 23. Anmerkung. Die Subtraction und Division (§. 21.) sind folglich die einzig möglichen Arten der Verminderung der Zahlen (§. 17.).

§. 24. Anmerkung. Aus dem bisherigen ersieht man, wie aus der Natur und aus den möglichen Veränderungen der Zahlen die vier Rechnungsarten, oder die sogenannten vier Species der Rechenkunst, nämlich die Addition (§. 18.), Subtraction (§. 21.), Multiplication (§. 18.) und Division (§. 21.) von selbst herfließen. Alle Rechnungen in Zahlen, sie mögen übrigens noch so sehr verschiedenartig oder zusammengesetzt seyn, sind nichts anders, als einfache Anwendungen, oder Verbindungen derselben.

§. 25. Erklärung. Bei der Addition (§. 18.) wird eine Zahl durch mehrere ihr ungleiche Zahlen vermehrt, und man findet aus den angegebenen eine einzige, welche so viele Einheiten hat, als alle zusammen. Die auf diese Art erhaltene Zahl heißt die Summe, und die einzeln gegebenen Zahlen werden die zu summirenden oder zu addirenden Zahlen genennt.

§. 26. Anmerkung. Wenn man die Zahlen zwei, vier und sieben addiren sollte, so wäre die Summe (§. 25.) eine Zahl von dreizehn, und die zu summirenden Zahlen hießen zwei, vier und sieben.

§. 27. Grundsätze. I. Die zu addirenden Zahlen müssen unter sich gleichartig seyn (§. 7.). Denn aus ihnen soll eine neue Zahl, die Summe (§. 25.), entstehen. — Sind die gegebenen Zahlen unter sich ungleichartig; können aber gleichartig gemacht werden, so kann man sie ebenfalls in eine Summe vereinen. (§. 10. II.)

II. Da die Summe so groß ist, als alle zu addirende Zahlen zusammengenommen (§. 25.), so können diese für jene, und jene kann für diese gesetzt werden.

III. Weil die Größe der Summe einzig von der Größe aller zu summirenden Zahlen abhängt, so ist es vollkommen einerlei, in welcher Ordnung die gegebenen Zahlen zusammengezählt werden, wenn sie nur alle in die Summe kommen. — So ist z. B. die Summe aus vier und fünf und acht einerlei mit der Summe aus fünf und acht und vier; aus acht und vier und fünf u. s. w. Denn wenn nur alle Theile in ein Ganzes zusammengefaßt werden, so müssen sie jedesmal dem Ganzen gleich seyn.

§. 28. Erklärung. In der Multiplication (§. 18.) wird eine gegebene Zahl mehrmal zu sich selbst gesetzt, woraus denn wieder eine andere Zahl entsteht. Die gegebene, welche mehrmal zu sich selbst gesetzt wird, heißt der Multiplicand; die Zahl, welche anzeigt, wie oft dieses geschehen soll, wird Multiplicator, und die dritte, welche aus dieser Zusammensetzung entspringt, das Product oder Factum genennt. Auch werden Multiplicator und Multiplicand mit dem gemeinschaftlichen Namen: Factoren bezeichnet.

§. 29. Anmerkung. Soll man die Zahl vier z. B. dreimal zu sich selbst setzen, so entsteht hieraus eine neue Zahl zwölf. Die gegebenen Zahlen vier und drei sind die beiden Factoren; insbesondere aber ist vier der Multiplicand, weil diese vier mehrmal zu sich selbst gesetzt wird, und drei der Multiplicator, weil diese drei anzeigt, daß die vier gerade dreimal zu sich selbst gesetzt werden soll. Die Zahl zwölf, welche auf diese Art entsteht, ist das Product oder Factum (§. 28.).

§. 30. Grundsätze. I. Die Multiplication ist ihrer Natur nach nichts anders, als eine Addition, d. h. eine Zusammensetzung einer und der nämlichen Zahl zu sich selbst, und das Product ist demnach nichts anders, als die Summe aus mehreren gleichen Zahlen.

II. Der Multiplicand ist so oft in dem Producte enthalten, als die Einheit (§. 7.) in dem Multiplicator. Denn für jede Einheit des Multiplicators wird der Multiplicand einmal in das Product gesetzt (§. 28.). — So ist (§. 29) der Multiplicand *vier* im Producte *zwölf* gerade *dreimal* enthalten, weil dieses Product zwölf durch ein dreimaliges Zusammensetzen der Zahl vier entstanden war.

III. Für jede Einheit des Multiplicators kommt der *ganze Multiplicand einmal* ins Product (II.). Nun besteht aber der Multiplicand aus allen Einheiten (§. 7.); folglich kommen auch alle Einheiten des Multiplicanden so oft in das Product, als wie viele Einheiten der Multiplicator enthält (§. 11.). Allein die Summe aller Einheiten im Multiplicator macht den Multiplicator selbst aus (§. 7.). Daher kommt auch der ganze Multiplicator so oft in das Product, als der Multiplicand die Einheit enthält. — Dieses wird durch folgendes Beispiel anschaulich:

A * * * * B
* * * *
C * * * *

Wenn man die in der Reihe von A nach B stehenden *vier* Sternchen (welche hier sichtbare Einheiten bedeuten) von A nach C *dreimal* **unter** einander setzt, so hat man auch die *drei* von A nach C stehenden Sternchen *viermal* von A nach B **neben** einandergestellt, wodurch *im Ganzen* immer *zwölf* vorhanden sind.

IV. Soll man also z. B. sechs mit vier multipliciren, d. h. die Zahl sechs viermal nehmen, so wird eben hierdurch auch die Zahl vier sechsmal genommen (III.); folglich ist sechsmal vier soviel, als viermal sechs, d. h. *einerlei Factoren geben, auch mit verkehrter Ord-*

nung, einerlei Factum. Daher ist es in Rücksicht der Größe des Productes einerlei, welchen von zwei Factoren man als Multiplicand, und welchen man als Multiplicator ansehen will, und man kann sagen: Multipliciren heißt, den einen Factor so oft nehmen, als der andere Factor die Einheit enthält.

§. 31. Erklärung. Bei der Subtraction (§. 21.) nimmt man eine kleinere Zahl von einer größern einmal hinweg (§. 12.) und erfährt so, was noch für ein Theil der größern übrig bleibt. Von den beiden gegebenen Zahlen heißt jene die größere oder der Minuend, wovon der Abzug geschieht; die andere aber die kleinere oder der Subtrahend, welche abgezogen wird. Beide zusammen heißen die Posten, und der übrig bleibende Theil der größern wird der Ueberrest, Ueberschuß, Rest, oder die Differenz genannt.

§. 32. Anmerkung. Wenn man von der Zahl zwölf eine andere acht einmal hinwegnehmen soll, so sind zwölf und acht die Posten; zwölf heißt die größere, acht die kleinere Zahl, und die Zahl vier, welche nach dem Abzuge übrig bleibt, wird der Rest genannt (§. 31.) — Der Fall, in welchem eine größere Zahl von einer kleinern abgezogen werden soll, gehört nicht hierher, sondern in die Lehre von den entgegengesetzten Zahlen, welche einen Theil der höhern Elementar-Arithmetik bildet.

§. 33. Grundsätze. I. Die Posten müssen gleichartige Zahlen seyn (§. 5.). Denn die Einheiten, woraus eine größere Zahl besteht, müssen es seyn (§. 9.) und die kleinere d. h. die abzuziehende Zahl muß, wenn ihr Abzug von der größern möglich seyn soll, als ein Theil der größern angesehen werden. — Wenn die Ungleichartigkeit der beiden gegebenen Zahlen aufgehoben werden kann, so kann auch bei ihnen die Subtraction Statt finden. So können z. B. von drei Gulden sehr wohl acht und dreißig Kreuzer abgezogen werden, obwohl Gulden

und Kreutzer ungleichartige Größen sind, denn hier kann einer dieser drei Gulden in sechzig Kreuzer verwandelt, und von diesen können die gegebenen acht und dreißig Kreuzer abgezogen werden.

II. Der Rest und die kleinere Zahl zusammengenommen (§. 25.) sind so groß, als die größere. Denn der Rest zeigt an, um wie viele Einheiten die größere Zahl größer, als die kleinere ist (§. 31.). Folglich muß dieser Ueberschuß, zu der kleinern gesetzt, die größere wieder hervorbringen. So ist in §. 32. acht und vier wieder soviel, als zwölf. Hierauf beruht ein Verfahren, welches die Probe der Subtraction heißt. Wenn man nämlich von einer gegebenen Zahl eine kleinere abgezogen hat, und man findet, nachdem der Rest zu dieser kleinern addirt wird, hierdurch eine Summe, welche der größern gleich ist, so ist, wenn in der Addition selbst kein Rechnungsfehler liegt, die Subtraction richtig.

III. Der Rest von der größern Zahl abgezogen, läßt auch die kleinere übrig. Denn der Rest und die kleinere Zahl sind die beiden Theile, woraus die größere Zahl zusammengesetzt ist (II.). Wenn aber ein Theil eines aus zwei Theilen bestehenden Ganzen von diesem Ganzen hinweggenommen wird, so muß wohl der andere übrig bleiben. Im §. 32. bleibt daher acht übrig, wenn man von der zwölf die vier wegnimmt.

IV. Wenn man daher überhaupt eine Summe hat, welche aus zwei Zahlen besteht, und nun die eine von diesen beiden Zahlen von der Summe wegnimmt, so muß die andere übrig bleiben. Die zwei Zahlen fünf und sieben geben zur Summe die Zahl zwölf. Zieht man nun von der zwölf die sieben ab, so muß fünf übrig bleiben, und nimmt man die fünf von ihr hinweg, so

erhält man sieben zum Reste. Besteht dagegen eine Summe aus drei Zahlen, und man nimmt eine von ihr hinweg, so muß die Summe der zwei andern übrig bleiben u. s. w. Hierauf gründet sich die sogenannte Probe der Addition durch die Subtraction.

V. Die Addition (§. 18.) und die Subtraction (§. 21.) sind einander entgegengesetzt. Wenn man daher zu einer gegebenen Zahl irgend eine andere addirt, und nun eben diese wieder von der Summe beider subtrahirt, so hat die erste Zahl gar keine Veränderung erlitten. Ebendieses hat auch Statt, wenn diese Zahl zuerst subtrahirt und sodann wieder zum Reste addirt wird.

VI. Wird zu einer gegebenen Zahl eine größere oder kleinere addirt und dann wieder eine kleinere oder größere von dieser Summe subtrahirt, so wird jene Zahl im ersten Fall vergrößert; im letzten aber verkleinert. — Ebenso umgekehrt. Beispiele erläutern dieses.

§. 34. Erklärung. Bei der Division wird eine gegebene kleinere Zahl von einer größern so oft abgezogen, als es geschehen kann (§. 21.). Die kleinere Zahl, welche mehrmal abgezogen wird, heißt der Divisor oder Theiler; die größere, wovon sie weggenommen wird, der Dividend oder die zu theilende Zahl, und jene Zahl, welche anzeigt, wie oft dieser Abzug geschehen kann, wird der Quotient genannt.

§. 35. Anmerkung. I. Sollte die Zahl zwanzig durch die Zahl vier dividirt werden, so würde man bestimmen müssen, wie oft diese letztere von jener hinweggenommen werden kann. Dieses Hinwegnehmen hat nun gerade fünfmal Statt. Daher ist hier vier der Divisor, zwanzig der Dividend und fünf der Quotient.

II. Die Fälle, bei welchen der Divisor größer ist, als der Dividend, gehören noch nicht hierher, sondern werden erst weiter unten (in der Lehre von den Brüchen) entwickelt.

§. 36. Grundsätze. I. Wie oft der Divisor vom Dividenden hinweggenommen werden kann, so oft kommt eine Einheit in den Quotienten (§. 34.). Folglich ist der Divisor so oft in dem Dividenden enthalten, als die Einheit in dem Quotienten. Dieses geht sehr deutlich aus §. 35. I. hervor, wo der Quotient deshalb fünf Einheiten enthält, weil der Divisor vier vom Dividenden zwanzig gerade fünfmal konnte weggenommen werden.

II. Ein Product aus dem Quotienten in den Divisor gibt den Dividenden. Denn nun wird für jede Einheit des Quotienten der Divisor wieder einmal gesetzt (§. 30.), woraus der Dividend entstehen muß. In §. 35. war vier in zwanzig gerade fünfmal enthalten. Folglich muß auch nothwendig zwanzig aus fünfmal vier zusammengesetzt, d. h. fünfmal vier muß wiederum zwanzig seyn.

III. Der Quotient, in den Dividenden dividirt, d. h. so oft vom Dividenden abgezogen, als es geschehen kann, gibt (zum neuen Quotienten) wiederum den Divisor. Denn, wenn dieses nicht geschehen sollte, so müßte entweder eine größere oder eine kleinere Zahl, als der Divisor, zu diesem neuen Quotienten herauskommen. In diesen beiden Fällen würde aber ein Product aus ihr in den ersten Divisor einen andern Dividenden, als den gegebenen hervorbringen, welches doch nicht geschehen kann, da einerlei Factoren auch jedesmal einerlei Factum geben müssen (§. 30. IV.). Im §. 35. kann man also auch fünf als Divisor und vier als den Quotienten betrachten; d. h. wenn vier in zwanzig gerade fünfmal enthalten ist, so muß auch fünf in zwanzig genau viermal enthalten seyn.

IV. Wenn daher ein Product, welches aus zwei Factoren besteht, durch den einen Factor dividirt wird, so

muß der andere Factor nothwendig als Quotient herauskommen. So gibt z. B. die Zahl zwanzig, als Product aus vier in fünf, durch vier dividirt, fünf; und, durch fünf dividirt, vier zum Quotienten.

V. Die Multiplication und Division dienen einander gegenseitig zu Proben. Der Satz in II. dieses §. ist die Probe für die Division; er heißt: Ein Product aus dem Divisor in den Quotienten muß dem Dividenden gleich seyn. Der Satz in IV. ist die Probe für die Multiplication; er lautet: Wird ein aus zwei Factoren entstandenes Product durch den einen dieser Factoren dividirt, so muß der andere Factor als Quotient erscheinen. — Bei diesen Proben wird jedoch immer zum voraus gesetzt, daß in der Proberechnung selbst kein Fehler mehr gemacht werde; weil, in dem Falle, wo dieses geschieht, die Probe unzuverläßig ist.

VI. Die Multiplication (§. 18.) und die Division (§. 21.) sind einander entgegengesetzt. Wenn man daher eine Zahl mit irgend einer andern multiplicirt, und dann dieses Product durch die nämliche Zahl wieder dividirt, so hat die erste Zahl gar keine Veränderung erlitten. Eben so auch umgekehrt, wenn eine Zahl mit einer gegebenen zuerst dividirt, und wenn sodann dieser Quotient durch eben diese gegebene wieder multiplicirt wird. — Wird aber eine Zahl mit zwei unter sich ungleichen Zahlen multiplicirt und dividirt, so entstehen andere Resultate, wie man leicht durch Beispiele erläutern kann.

VII. Da der Divisor so oft in dem Dividenden enthalten ist, wie oft der Quotient die Einheit enthält (I.), so kann der Divisor als ein Theil des Dividenden angesehen werden; nämlich als der so vielte Theil desselben, als wie viele Einheiten der Quotient enthält. Daher ist jede Division eine Theilung, und Dividiren heißt:

den Dividenden in so viele gleiche Theile theilen, als wie oft es der Divisor durch die Menge seiner Einheiten anzeigt. Wenn z. B. fünfzehn durch drei dividirt wird, wodurch man fünf zum Quotienten erhält, so ist die Zahl fünfzehn eben hierdurch in drei gleiche Theile getheilt worden, und fünf ist der dritte Theil von fünfzehn.

VIII. Aus III. und VII. folgt ebenso, daß der Dividend auch in so viele gleiche Theile getheilt betrachtet werden kann, als wieviele Einheiten der Quotient enthält.— In dem vorigen Beispiele (VII.) ist auch drei der fünfte Theil von fünfzehn.

Zweite Abtheilung.

Von den ganzen Zahlen.

---

§. 37. Willkührlicher Satz. Die Zahlen im allgemeinen sind Mengen von Einheiten (§. 7.). Um dieselben ihrem Werthe nach zu bestimmen und in Rücksicht ihrer Größe von einander zu unterscheiden, bezeichnet man sie in jeder Sprache mit besondern Namen. Die Einheit, für sich selbst betrachtet, nennt man Eins; kommt hierzu noch eine andere Einheit, so heißt man es eine Zahl von zwei Einheiten, oder mit einem Worte Zwei; zu diesen noch eine neue gesetzt, heißt Drei; dieser wieder eine beigefügt, gibt Vier; zu vier eine, Fünf; zu fünf eine, Sechs; zu sechs eine, Sieben; zu sieben eine, Acht; zu acht eine, Neun; zu neun eine, gibt Zehn, u. s. w. nach den bekannten Zahlen, welche mit Eilf, Zwölf, Dreizehn, Vierzehn, Fünfzehn, Sechszehn, Siebenzehn, Achtzehn und Neunzehn benannt werden, und deren folgende jedesmal durch Zusetzung einer neuen Einheit zur vorhergehenden entsteht. Nun sind alle größere Zahlen, welche aus diesen kleinern durch Beifügung neuer Einheiten hervorgehen, entweder genau ein Mehrfaches von zehn Einheiten, oder die Summe aus einem Mehrfachen von Zehn und einer Zahl die kleiner ist, als zehn. Denn wenn man z. B. von

einem Haufen Fruchtkörner, wenn er auch noch so groß wäre, einmal zehn hinwegnimmt und dann wieder zehn, und so immer fortfährt, Mengen von zehn hinwegzunehmen, so bleibt am Ende entweder kein Fruchtkorn mehr übrig, oder die Zahl der übrigbleibenden muß weniger als zehn betragen. Daher hat man, der Bequemlichkeit wegen, besondere Namen angenommen, um diese Verschiedenheit zu bezeichnen. Man nennt eine Zahl von zweimal zehn mit einem Worte Zwanzig; dreimal zehn, Dreißig; viermal zehn, Vierzig; fünfmal zehn, Fünfzig; sechsmal zehn, Sechszig; siebenmal zehn, Siebenzig; achtmal zehn, Achtzig; neunmal zehn, Neunzig; und zehnmal zehn, Hundert. Ferner heißt man zehnmal hundert, Tausend; tausendmal Tausend, eine Million; millionmal Million, eine Billion; millionmal Billion, eine Trillion; millionmal Trillion, eine Quatrillion; millionmal Quatrillion, eine Quintillion u. s. w. ins Unendliche fort. Denn man erkennt sogleich, daß es eigentlich keine größte Zahl geben kann. Man kann sich nämlich immer eine noch größere denken, als eine gegebene (noch so große) ist.

§. 38. Erklärung. Man nennt die Zahl von zehn Einheiten einen Zehner; ferner zehn Zehner einen Hunderter; zehn Hunderter einen Tausendter u. s. f. Aus diesem Gesetze des Fortschreitens nach Zehn entstehen (nach §. 37.) immer neue Zahlen, welche zehnmal größer als die unmittelbar vorhergehenden sind. Man heißt sie, mit einem gemeinschaftlichen Worte, höhere Ordnungen und sagt, die Zehner sind von der ersten Ordnung, die Hunderter von der zweiten, die Tausendter von der dritten Ordnung u. s. w.

§. 39. Zusatz. Eine Einheit von der höhern Ordnung (§. 38.) ist zehnmal größer, als eine Einheit von

der nächstniedrigen Ordnung; und umgekehrt ist eine Einheit von der niedrigern Ordnung zehnmal kleiner, als eine Einheit von der nächsthöhern. So ist z. B. ein Tausendter soviel als zehn Hunderter, und ein Zehner ist der zehnte Theil von einem Hunderter u. s. w.

§. 40. Anmerkung. Dieses Gesetz (§. 38.), bis auf zehn zu zählen und hier immer eine neue, zehnmal größere Einheit anzunehmen, hat keineswegs in der Nothwendigkeit so verfahren zu müssen, sondern lediglich in einem Einverständnisse der Menschen seinen Grund. Man hätte eben sowohl eine größere, oder eine kleinere Menge von Einheiten für eine Einheit der höheren Ordnungen (§. 38.) annehmen können. Der berühmte Leibnitz gab durch seine Arithmetica dyadica den Beweis hiervon, worin derselbe nur auf zwei zählt, und durch die beiden Zeichen 1 und 0 alle Zahlen anschreiben und aussprechen lehrt. — Auch verdient hier noch das zwölftheilige System (Duodecimalsystem) bemerkt zu werden. Siehe hiervon weiter unten (§. 42.).

§. 41. Willkührlicher Satz. Wenn man die einfachen Zahlen von Eins bis Neun (§. 37.), in ihrer natürlichen Ordnung, durch die bekannten, überall angenommenen Zeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, welche Ziffer genannt werden, ausdrückt, so wird man hierdurch (nach §. 37.) alle möglichen Zahlen bezeichnen können, wenn man nur weiß, auf was für Ordnungen (§. 38.) sie sich beziehen; d. h. wenn man ein Kennzeichen hat, welches bestimmt, von welcher Ordnung (§. 38.) dieselben sind. Dieses Kennzeichen sei nun die Stelle, worin sich eines der obigen neun Zeichen in Bezug auf das andere befindet, welches neben ihm steht. Man nehme an, eine Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Linken steht, habe, vermöge ihrer Stelle, einen zehnfach höhern Werth, oder sei von der nächsthöhern Ordnung (§. 38.), so kann man auf diese Art, durch die nebeneinander stehenden Ziffer einer Zahl, die Ordnung einer jeden dieser Ziffer, und, durch den aus der Gestalt her-

vorgehenden Werth der Ziffer selbst, auch die Menge der vorhandenen Einheiten in dieser Ordnung angeben, und folglich die Größe der ganzen Zahl bestimmen (§. 37.). Sind von einer der unmittelbar aufeinander folgenden Ordnungen keine Einheiten in der Zahl vorhanden, so wird an die Stelle, wo diese Ordnung stehen sollte, das Zeichen der Nulle (0) gesetzt, um hierdurch den noch folgenden Ziffern der Zahl nichts von ihrem Werthe zu benehmen. — Diese Ziffer sind folglich von den Zahlen verschieden, indem sie als sichtbare Zahlzeichen erscheinen; gerade so, wie das gesprochene Wort: acht, ein hörbares Zahlzeichen ist.

§. 42. Anmerkung. I. Zur Erläuterung des Gesagten bemerke man Folgendes. Man denke sich eine der obigen neun Ziffer, z. B. die 6, so zeigt diese, an und für sich, eine Menge von sechs Einheiten an. Allein hieraus ist noch nicht ersichtlich, ob diese Einheiten sich auf bloße Einer, auf Zehner, auf Hunderter, oder ob sie sich auf eine noch höhere Ordnung (§. 38.) beziehen. Setzt man aber neben diese 6 zur Linken eine andere Ziffer, z. B. eine 8, so bedeutet diese 8 nunmehr 8 Einheiten von der ersten Ordnung, oder 8 Zehner (§. 38.) und die Zahl 86 ist so viel, als 8 Zehner und 6 Einer; oder, wie man es durch Worte ausspricht: sechs und achtzig. Kommt neben diese 8 zur Linken noch eine 5, so gehört diese 5 nun zur zweiten Ordnung, d. h. zu den Hunderten, und die ganze Zahl 586 ist soviel, als fünfhundert sechs und achtzig. Wird noch eine 7 neben die 5 gesetzt, so wird die Zahl 7586 so viel, als siebentausend fünfhundert sechs und achtzig. — Wäre die gegebene Zahl diese 809, so steht die 8 in der dritten Stelle oder ist von der zweiten Ordnung, und die Nulle zeigt an, daß keine Einheiten von der ersten Ordnung vorhanden sind. Daher heißt diese Zahl nunmehr achthundert und neun. — Dieses Zahlensystem wird demnach das zehntheilige oder das decadische genannt, weil zehn jene Zahl ist, auf welcher es beruht.

II. Wollte man (nach §. 40.) nur auf Zwei zählen, so würden die aufeinander folgenden Ordnungen diese seyn: Einer, Zweier,

Vierer, Achter, Sechzehner, Zwei und dreißiger u. s. w. Nach diesem dyadischen Systeme entstände folgende Bezeichnung:

10	bedeutete	Zwei
11	„	Drei
100	„	Vier
101	„	Fünf
110	„	Sechs
111	„	Sieben
1000	„	Acht
1001	„	Neun
1010	„	Zehn
1011	„	Eilf
1100	„	Zwölf u. s. w.

So einfach nun dieses System ist, so unbequem wäre es für die practische Anwendung, weil man, um Zahlen von einiger Größe auszudrücken, eine allzulange Reihe von 1 und 0 haben müßte, wie leicht in Beispielen erläutert werden kann.

III. Nach dem zwölftheiligen (oder duodecadischen) Zahlensysteme würden die Ordnungen folgende seyn: Einer, Zwölfer, Einhundert vier und vierziger, Eintausend siebenhundert acht und zwanziger u. s. w. und man müßte noch eine besondere Ziffer für Zehn und eine für Eilf haben. Die Bezeichnung wäre nunmehr folgende:

10	bedeutete	Zwölf
11	„	Dreizehn
12	„	Vierzehn
13	„	Fünfzehn
14	„	Sechzehn
15	„	Siebenzehn u. s. w.

IV. Die Erfindung, mit so wenigen Zahlzeichen (Ziffern) alle möglichen Zahlen darzustellen, ist eine der wichtigsten, welche jemals gemacht worden sind. Den alten griechischen Mathematikern, z. B. dem Apollonius, Archimedes, Euclides, deren geometrischen Tiefsinn wir heut zu Tage noch bewundern, war dieselbe unbekannt. Daher ist ihre Arithmetik sehr beschränkt und unvollkommen gewesen. Aus dieser so sehr fruchtbaren Erfindung geht die Bildung der Zahlensysteme hervor, und man erkennt

aus dem Bisherigen, daß es unzählig vielerlei solcher Systeme geben könne. Jedes derselben beruht aber, wenn es brauchbar seyn soll, auf folgenden zwei Grundsätzen:

1) Man zähle auf eine beliebige Menge von Einheiten und steige nach dem Gleichvielfachen derselben zu den höheren Ordnungen empor. Die Zahl, welche diese bestimmte Menge von Einheiten darstellt, heißt die **Grundzahl** des Zahlensystems.

2) Man gebe jeder Ziffer, welche einer andern zur Linken steht, vermöge ihrer Stelle, einen sovielmal höhern Werth, als auf wieviel man willkührlich gezählt hat.

3) Hieraus folgt nun ferner, daß man in jedem Zahlensysteme soviele Ziffer nöthig habe, als auf wie viel man gezählt hat, weniger einer. Im dyadischen Systeme braucht man eine; im decadischen braucht man neun; im duodecadischen Systeme aber eilf Ziffer u. s. f. Die Nulle ist keine Ziffer.

§. 43. **Aufgabe.** Eine durch Ziffer geschriebene Zahl mit Worten auszusprechen.

Auflösung.

I. Man theile die gegebene Zahl von der rechten gegen die linke Hand in Gefache ein, gebe jedem Gefache drei Ziffer, und bemerke diese Gefache durch kleine Striche, welche man, nach dem Muster der folgenden Beispiele, unten an die Ziffer setzt.

II. Die Stelle der Millionen (§. 37.) bemerke man mit einem Puncte über jener Ziffer, welche die **Einer** von Millionen anzeigt. Eben so die Billionen mit zwei, die Trillionen mit drei Puncten, u. s. w.

III. Nun fange man bei der höchsten Stelle der ganzen Zahl an, spreche jedesmal alle einzelnen Ziffer aus, bis mit auf diejenige, welche mit einem oder mehreren Puncten bezeichnet ist, und setze nun das Wort bei, welches sich (nach II.) auf die Bedeutung dieser Puncte bezieht. Auf

solche Art gehe man bis zur niedrigsten Stelle der Zahl fort.

IV. Sind Nullen in der Zahl, so werden diejenigen Stellen, worin sie sich befinden, in dem Aussprechen übergangen.

V. Da aus dem Bisherigen klar ist, daß jede Ziffer der auszusprechenden Zahl einen ihr eigenen Zifferwerth und einen Stellenwerth hat, so beruhet das Aussprechen der angegebenen Zahl auch darauf, daß man jede Ziffer (von der höchsten bis zur niedrigsten Ordnung) nach diesem doppelten Werthe benennt.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht unmittelbar auf den willkührlichen Sätzen von §. 37. bis §. 42. und bedarf demnach keiner weitern Auseinandersetzung. Daß übrigens diese bloß willkührlichen Sätze (§. 37. — §. 42.) der wissenschaftlichen Schärfe nicht entgegenstehen, ist bereits früher (S. 9.) bemerkt worden.

Beispiele.

I. Man soll die Zahl 87423956 aussprechen.

Theilt man dieselbe, nach Vorschrift der Auflösung, in Classen, und bezeichnet jede einzelne Ziffer mit ihrem besondern Namen, so bekommt man nachstehendes:

8	7,	4	2	3,	9	5	6
Zehner von Millionen.	Einer von Millionen	Hunderter von Tausend	Zehner von Tausend	Einer von Tausend	Hunderter	Zehner	Einer

Man spricht daher: Sieben und achtzig Millionen, viermal hundert drei und zwanzig Tausend, neun hundert sechs und fünfzig.

Nach V. sagte man: Acht Zehner von Millionen, sieben Einer von Millionen, vier Hunderter von Tausend, zwei Zehner von Tausend, drei Einer von Tausend, neun Hunderter, fünf Zehner und sechs Einer. — Obwohl diese Art, die Zahl auszusprechen, die natürlichste ist, so weicht doch der deutsche Sprachgebrauch davon ab.

II. Die Zahl 3487591283274653 abgetheilt, stehet so:

3, 4 8 7̈, 5 9 1, 2 8 3̇, 2 7 4, 6 5 3

3	Tausender von Billionen.
4	Hunderter von Billionen
8	Zehner von Billionen
7	Einer von Billionen
5	Hunderttausender von Millionen
9	Zehntausender von Millionen
1	Tausender von Millionen
2	Hunderter von Millionen
8	Zehner von Millionen
3	Einer von Millionen
2	Hunderter von Tausend
7	Zehner von Tausend
4	Einer von Tausend
6	Hunderter
5	Zehner
3	Einer

Folglich mit Worten: Dreitausend vier hundert sieben und achtzig Billionen, fünfmal hundert ein und neunzig tausend zwei hundert drei und achtzig Millionen, zweimal hundert vier und siebenzig tausend, sechshundert drei und fünfzig. Es ist eine gute Uebung für Anfänger, diese Zahl (und andere) nach der eigentlich naturgemäßen Art mit Worten auszusprechen (in I.).

III. Die Zahl 8076000893005000832004 abgetheilt, gibt

8,076,000,893,005,000,832,004

Oder: Acht tausend sechs und siebenzig Trillionen, acht hundert drei und neunzig Billionen, fünf tausend Millionen, achtmalhundert zwei und dreißig tausend und vier. Es werden nämlich hier alle mit Nullen ausgefüllten Ordnungen bei dem Aussprechen nicht benannt.

§. 44. Aufgabe. Eine durch Worte gegebene Zahl in Ziffern auszudrücken.

Auflösung. Man drücke (nach §. 37. und §. 42.) jede Menge der in jeder Ordnung (§. 38.) gegebenen Einheiten durch eine ihr gebührende Ziffer aus, und setze sie in die gehörige Stelle, wobei man diejenige mit Nullen ausfüllen muß, worin keine Einheiten gegeben sind. Da wir die Ordnungen von den Einern bis Hunderttausend, sowohl in bloßen Einern, als auch in Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. haben, so kann man die jedesmaligen (hierzu nöthigen) sechs Ziffer nicht eher gehörig schreiben, bis dieselben zuerst alle genannt sind.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht wieder auf den willkührlichen Sätzen von §. 37.—§. 42. und wird durch folgende Beispiele um so einleuchtender.

Beispiele.

I. Um: Eine Million, sechsmalhundert drei und achtzig tausend, fünf hundert drei und zwanzig anzuschreiben, müssen alle Ordnungen von Millionen bis zu den Einern mit Ziffern besetzt werden, weil in allen diesen aufeinander folgenden Ordnungen bestimmte Mengen vorhanden sind. Daher ist diese Zahl eigentlich 1 Million, 6 Hunderttausend, 83 Tausend, 5 Hundert, 20 und 3, oder soviel, als 1,683,523.

II. In folgender Zahl: Acht hundert und drei Millionen, dreißig Tausend und neun, fehlt

zwischen den Hunderten und Einern von Millionen die Ordnung der Zehner von Millionen; daher muß diese Stelle mit einer Nulle ausgefüllt werden. Nun kommen nach den Einern von Millionen sogleich die Zehntausende; es fehlen daher die Hunderttausende, und es muß wieder eine Nulle eingeschoben werden. Endlich sind nach den Zehntausenden sogleich die Einer genannt, und folglich drei Ordnungen übergangen worden, welche wieder mit drei Nullen ausgefüllt werden müssen, und die Zahl steht nunmehr so: 803,030,009.

Es ist sehr zweckmäßig, die Schüler in mehreren solcher Beispiele an der Tafel zu üben.

§. 45. Anmerkung. Zur Erläuterung der obigen Beispiele dient Folgendes: Man drücke alle gegebene Einheiten der verschiedenen Ordnungen einzeln aus, und bringe sie nachher in eine einzige Zahl, so wird die anzuschreibende daraus entstehen. Die Zahl in §. 44. I. wäre diese:

1000000	oder eine Million
600000	oder 6 Hunderttausend
80000	oder 80 Tausend
3000	oder 3 Tausend
500	oder 5 Hundert
20	oder zwanzig
3	oder drei, folglich ist

die Zahl 1,683,523.

Die dortige Zahl in II. wäre folgende:

800000000	oder 8 hundert Millionen
3000000	oder 3 Millionen
30000	oder 30 Tausend
9	oder neun, daher ist

803,030,009 die verlangte Zahl.

Nebst den angegebenen Regeln ist die Uebung das beste Mittel für Anfänger, um sich, sowohl im Aussprechen als Anschreiben der Zahlen, die nöthige Fertigkeit zu erwerben.

I. Die Addition.

§. 46. Aufgabe. Mehrere gegebene Zahlen zusammen in eine Summe zu bringen, d. h. dieselben zu addiren.

Auflösung.

I. Man schreibe die einzeln gegebenen Zahlen dergestalt untereinander, daß alle Einer, alle Zehner und so alle folgenden höheren Ordnungen derselben lothrecht untereinander kommen, und ziehe einen Strich.

II. Man zähle alle Einer der zu addirenden Zahlen zusammen, so beträgt ihre Summe entweder selbst wieder einen Einer, oder sie macht einen Einer und einen Zehner, oder sie gibt einen oder mehrere Zehner ohne Einer oder noch mit einigen Einern.

III. Im ersten Falle setze man den gefundenen Einer unter die Reihe der Einer. Im zweiten hingegen setze man den Einer hin; nehme aber den mit ihm verbundenen Zehner zur Reihe der Zehner der gegebenen Zahlen, und mache nun die Summe aller Zehner. Im dritten Falle setze man in die Stelle der Einer eine Nulle oder die nebst den Zehnern noch vorhandenen Einer, und nehme wieder die erhaltenen Zehner zur folgenden Stelle der Zehner.

IV. Hier bleibt nun diese Summe aus den Zehnern entweder allein in den Zehnern, und jetzt kommt sie unter die Reihe der Zehner; oder sie ist ein Zehner und ein Hunderter, und jetzt kommt der Zehner unter die Zehner, und den Hunderter nimmt man zur folgenden Ordnung der Hunderter hinüber. Beträgt aber diese Summe aus

Zehnern etwa einen oder mehrere Hunderter ohne Zehner, so kommt in die Stelle der Zehner eine Nulle, und die Hunderter werden zur folgenden Ordnung hinüber gezählt.

V. Auf diese Art verfahre man mit jeder folgenden Ordnung, und setze immer Dasjenige, was aus der Summe der in ihr gegebenen Ziffer in die nächsthöhere kommt, in dieselbe, und dieses so lange, bis man zur höchsten Stelle in der größten der gegebenen Zahlen gekommen ist.

Beweis. Die Vorschrift I. gründet sich auf §. 27. I.; die folgenden beruhen theils auf eben diesem Satze; theils auf den willkührlichen Sätzen von §. 37. — §. 42. Denn die Summe aus mehreren gegebenen Zahlen besteht in der Summe aller ihrer einzelnen Theile. Nun sind aber die Ordnungen (§. 38.) derselben ihre Theile, und durch die gegebene Auflösung kommen alle einzelne Ordnungen in eine Summe; folglich auch alle Theile der Zahlen, d. h. die Zahlen selbst.

Beispiele.

I. Man soll die Zahlen 17804, 374902, 4592, 80301, 387 zusammen addiren. Zuerst setze man die gleichartigen Ziffer untereinander. Nämlich so:

17804	
374902	
4592	zu addirende Zahlen, und bilde sodann nach den gegebenen Regeln die Summe.
80301	
387	
477986	Summe.

Diese Summe ist so entstanden: Die Summe aller Einer der gegebenen Zahlen beträgt 16. Nun sind aber 16 Einer soviel, als 1 Zehner und 6 Einer; daher kom-

men diese 6 Einer unter die Stelle der Einer, und den 1 Zehner nimmt man zu der ersten Ordnung hinüber, wo dann die untere Ziffer 8 in dieser Reihe, wegen des 1 Zehners, welchen man im Sinne behalten hat, nun als eine 9 angesehen werden muß. Die Summe aller vorhandenen Zehner ist 18, d. h. 8 Zehner und 1 Hunderter. Daher bleiben jene 8 unter den Zehnern stehen, und dieser wird zu seiner gleichartigen Ordnung gezählt. Alle Hunderter betragen somit 29, d. h. 2 Tausender, welche wieder zur folgenden Ordnung kommen, und 9 Hunderter, welche in die Stelle der Hunderter gesetzt werden müssen. Die Summe aller Tausender ist nun 17, d. h. ein Zehntausender und 7 einfache Tausender, welche letztere hingeschrieben werden, da der 1 Zehntausender zur nächsthöhern Ordnung kommt, und mit den hier vorhandenen Ziffern 17 Zehntausender, oder ein Hunderttausender und 7 Zehntausender ausmacht. Diese sieben werden daher hingesetzt, und die 1 kommt hinüber, wo sie mit den gegebenen Ziffern eine Summe von 4 Hunderttausendern bildet.

Beispiel.

74083 9702 847 908 8754	Zu addirende Zahlen.
24 17 31 21 7	Theilsummen aus den Einern und höhern Ordnungen.
94294	Hauptsumme.

Werden hier zuerst alle Einer in eine Summe gebracht, so bekommt man 24, welche unter die Reihe der Einer geschrieben werden müssen, weil sie mit diesen von einerlei Art sind. Auf eben diese Art beträgt die Summe der Zehner 17, und diese muß ebenfalls unter die Stelle der Zehner gesetzt werden. Fährt man nun so fort, die Summen aller übrigen höhern Ordnungen zu bilden, so bekommt man, wie es das Beispiel zeigt, so viele einzelne oder Theilsummen, als wie viele Ziffer die größte der gegebenen Zahlen enthält. Werden nunmehr diese einzelne Theilsummen, nach obiger Vorschrift, wiederum in eine gebracht, so entsteht hieraus die Hauptsumme, welche allen einzelnen Zahlen zusammengenommen gleich seyn muß, da sie aus den Summen aller gleichnamigen Ordnungen der gegebenen zu addirenden Zahlen besteht.

§. 47. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Addition ist dieses $+$. Es wird zwischen die zu addirenden Zahlen gesetzt, und durch plus und zu ausgedrückt. Z. B. $19 + 8 + 32 + 12$, heißt: 19 zu 8 zu 32 zu 12, oder: diese vier Zahlen sollen in eine Summe gebracht werden. Diese ist 71, und um es zu bezeichnen, gebraucht man das Zeichen der Gleichheit $=$, welches zwischen die zu addirenden Zahlen und ihre Summe gesetzt wird. Z. B. $19 + 8 + 32 + 12 = 71$, d. h. die Summe aus 19 und 8 und 32 und 12 ist gleich 71.

§. 48. Anmerkung. I. Wer eine Additionsaufgabe aufgelöset hat, und der Richtigkeit seiner Rechnung, wenigstens mit vieler Wahrscheinlichkeit, versichert seyn will, rechne jedesmal die Summe einer Reihe von oben herunter, und dann noch einmal von unten hinauf. Bekommt man auf diese Art immer die nämliche Summe, so ist es nicht wohl zu vermuthen, daß in der Rechnung gefehlt worden sei. Uebrigens ist hier, so wie überhaupt bei allen arithmetischen Arbeiten, eine ungetheilte Aufmerksamkeit und öftere

Uebung das sicherste Mittel, den Anfänger gegen das Einschleichen der Rechnungsfehler zu schützen.

II. Wenn eine sehr lange Reihe von Zahlen zu addiren ist, so theilt man sie am Füglichsten in mehrere kleinere Abtheilungen, bildet aus ihnen die Theilsummen, und aus letzteren sodann die Hauptsumme. Beispiele hierüber müssen von den Schülern durchgerechnet werden.

III. Sollte, bei vielen zu addirenden Zahlen, die Summe ihrer Einer z. B. 136 betragen, so kommt die Ziffer 6 in die Reihe der Einer und die 13 Zehner werden zu den Zehnern gezählt.

Die Subtraction.

§. 49. Aufgabe. Eine kleinere Zahl von einer größeren zu subtrahiren.

Auflösung.

I. Man schreibe die beiden gegebenen Zahlen so, daß die gleichartigen Stellen, d. h. die Ziffer von einerlei Ordnungen lothrecht unter einander kommen, und ziehe einen Absonderungsstrich.

II. Sind nun alle einzelnen Ziffer der kleinern Zahl kleiner, als die ihnen gleichartigen der größern, so nehme man jene von diesen in Gedanken hinweg, und schreibe den jedesmaligen Rest zweier gleichnamigen Ordnungen unter den gezogenen Strich. Ist aber die abzuziehende Ziffer jener andern, wovon der Abzug geschehen soll, gleich, so kommt in die Stelle des Restes eine Nulle (Siehe Beispiel I.).

III. Tritt der Fall ein, daß eine größere Ziffer der kleinern Zahl von einer kleinern in der größern hinweggenommen werden soll, so gehe man zur Ziffer der nächsthöhern Ordnung in der größern Zahl, und nehme eine Einheit von ihr herüber, welches Eins lehnen oder Eins borgen genannt, und durch ein Pünctchen an der

höhern Ziffer bemerkt wird. Diese Einheit macht in der nächst niedrigern Ordnung zehn aus (§. 41.), und nun kann, wenn zu diesen Zehn die vorhandenen Einheiten der niedrigern Ordnung in Gedanken gesetzt werden, die größere Ziffer von diesem Ganzen abgezogen werden. Diese Regel vom Lehnen muß so oft befolgt werden, als der Fall eintritt, daß von einer kleinern Ziffer eine größere abgezogen werden soll (Siehe Beispiel II.).

IV. Sind in der größern Zahl mehrere aufeinanderfolgende Nullen, so soll man die Ziffer der kleinen Zahl entweder von der ersten dieser Nullen abziehen, oder sie soll von einer kleinern Ziffer in der größern Zahl, auf welche in höhern Ordnungen diese Nullen erst folgen, hinweggenommen werden. Im ersten Falle wird die Nulle der niedrigsten dieser Ordnungen eine 10; jede übergangene Nulle aber 9. Im zweiten werden alle im Lehnen übergangene Nullen 9, und die kleinere Ziffer, wovon man eigentlich zuerst abziehen sollte, wird um 10 vermehrt (Siehe Beispiel III.).

Beispiele.

I. 895247865 Größere Zahl } oder die Posten.
74235432 Kleinere Zahl }

821012433 Rest, oder Differenz, oder Unterschied.

II. 583245821 Größere Zahl.
97823948 Kleinere Zahl.

485421873 Rest oder Differenz.

III. 97000260030002 Größere Zahl.
8749382978623 Kleinere Zahl.

88250877051379 Rest. —

Beweis. Die Regel I. beruht auf §. 33. I. Die Vorschrift II. gründet sich auf den Satz: daß ein Ganzes von einem andern Ganzen hinweggenommen wird, wenn alle Theile des ersten von allen ihnen gleichartigen Theilen des letztern weggenommen werden. Eben hierauf, und auf dem willkührlichen Satze in §. 41 beruht das Verfahren in III. Die Richtigkeit der Regel IV. gründet sich auf Folgendes: Im obigen III. Beispiele soll man drei Einer von zwei Einern abziehen, welches an und für sich unmöglich ist. Allein, da man durch die Subtraction nicht fordert, eine jede einzelne Ziffer der kleinern Zahl von jeder einzelnen ihr gleichartigen Ziffer der größern hinwegzunehmen, so kommt es hier nur auf den Unterschied der ganzen Zahlen, nicht aber auf jenen ihrer einzelnen Theile an. Man muß daher in der obigen größern Zahl bis in die Stelle der Zehntausender gehen, weil in den Zwischenordnungen keine Ziffer gegeben sind. Man lehnt also in der vierten Ordnung einen Einer von Zehntausenden oder 10000. Allein 10000=9000 +900+90+10=9990+10. Folglich werden die drei neben der Ziffer 3 stehenden Nullen in obiger Zahl in drei 9 verwandelt, und die 10 kommt, wie gewöhnlich, zu den zwei Einern und macht mit diesen zwölf aus, wovon, nachdem man drei abgezogen hat, noch neun übrig bleiben Da nun diese Zergliederung eben so auf den andern Fall (von IV.), wo man über Nullen hinweglehnen muß, angewendet werden kann, so ist hierdurch die Allgemeinheit der obigen Vorschrift gerechtfertigt.

§. 50. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Subtraction ist ein kleiner Querstrich (—), welcher zwischen die beiden Posten gesetzt, und durch minus oder weniger ausgesprochen wird. Z. B. 20—12=8, heißt

20 weniger 12 ist gleich 8. Eben so ist 19 — 13 = 6; 1894 — 785 = 1109; 70038 — 5786 = 64252 u. s. w.

§. 51. Anmerkung. Die Addition und die Subtraction dienen einander gegenseitig zu Proben (§. 33. II.)

Einige Beispiele werden dieses erläutern.

I. Die zu addirenden Zahlen seien A und B.

79854378	A
3979483	B
83833861	Summe.

Zieht man von dieser Summe die Zahl A ab, so bleibt die Zahl B übrig; nämlich:

	83833861	Summe, davon
	79854378	A abgezogen,
bleibt	3979483	Rest, oder B.

Nimmt man hingegen von dieser nämlichen Summe die Zahl B hinweg, so bekommt man zum Reste die Zahl A; z. B.

	83833861	Summe, davon
	3979483	B abgezogen
bleibt	79854378	Rest, oder A.

Denn wenn ein Ganzes aus zwei Theilen besteht und man nimmt den einen Theil von ihm hinweg, so muß der andere übrig bleiben.

II. Für die Subtraction sei folgendes Beispiel:

	93758926	Größere Zahl,
	8597858	Kleinere Zahl abgezogen
bleibt	85161068	Rest.

Wird zu diesem Reste die kleinere Zahl addirt, so gibt diese Summe die größere; nämlich:

	85161068 Rest	addirt.
	8597858 Kleinere Zahl	
gibt	93758926 oder die größere Zahl.	

Nähme man von der größern Zahl die Differenz hinweg, so müßte die kleinere übrig bleiben. Denn diese zwei letztern sind die Theile der erstern Zahl.

III. Die Multiplication.

§. 52. Aufgabe. Alle Producte zu finden, welche entstehen, wenn man irgend zwei der einfachen Zahlen von 1 bis 9 miteinander multiplicirt.

Auflösung. Man schreibe die Zahlen von 1 bis 9 in die wagrechte Reihe A B. Nun setze man unter jede Ziffer ihr Doppeltes in die Gefache der Reihe C D; ferner ihr Dreifaches, (welches entsteht, indem man die Ziffer in C D zu jenen in A B addirt) in die Reihe E F; nun das Vierfache, (welches man durch Summirung des Dreifachen und Einfachen erhält) in die Gefache von G H, und fahre auf diese Art immer weiter fort, bis endlich in R S das Neunfache gesetzt wird, so ist die Aufgabe aufgelös't, indem unmittelbar aus der Verfertigung des Täfelchens schon folgt, daß alle Mehrfache von 1 bis 9 darin angetroffen werden müssen, da sie alle durch wiederholte Addition dieser Zahlen zusammengesetzt worden sind.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
C	2	4	6	8	10	12	14	16	18	D
E	3	6	9	12	15	18	21	24	27	F
G	4	8	12	16	20	24	28	32	36	H
I	5	10	15	20	25	30	35	40	45	K
L	6	12	18	24	30	36	42	48	54	M
N	7	14	21	28	35	42	49	56	63	O
P	8	16	24	32	40	48	56	64	72	Q
R	9	18	27	36	45	54	63	72	81	S

§. 53. Anmerkung. I. Diese Sammlung aller Producte aus irgend zwei Ziffern der Zahlen von 1 bis 9 heißt auch das Pythagorische Täfelchen, oder das Einmaleins. Soll nun z. B. das Product von sechsmal acht gefunden werden, so suche man die Ziffer 6 in der lothrechten Reihe AR und die Ziffer 8 in der wagrechten Reihe AB. Fährt man nun in der Reihe LM wagrecht zur Rechten und von der Ziffer 8 lothrecht herunter, so kommt man auf die Zahl 48, welche das verlangte Product ist.

II. Da, wie es die folgenden Sätze lehren werden, bei Auflösung der Multiplications-Aufgaben, diese Producte unentbehrlich sind, so müssen sich Anfänger um so mehr eine Fertigkeit in denselben verschaffen, als auf dem Auswendigwissen des Einmaleins die Leichtigkeit in dem Multipliciren und Dividiren größtentheils beruhet. Auch müssen diese Multiplicationsübungen noch weiter gehen.

§. 54. Aufgabe. Eine gegebene Zahl mit einem Einer zu multipliciren.

Auflösung.

I. Man setze den Multiplicator unter die Stelle der Einer des Multiplicanden, und ziehe einen Strich (Siehe die Beispiele).

II. Man mache, nach dem Einmaleins, (§. 53.) ein Product aus dem Multiplicator in die Einer des Multiplicanden, und setze dasselbe mit seiner niedrigsten Stelle, (wenn es die Einer übersteiget) unter die Einer des Multiplicanden.

III. Man mache das Product aus dem Multiplicator in die Zehner des Multiplicanden, und schreibe es mit der niedrigsten Ziffer unter die Zehner des Multiplicanden.

IV. Verfährt man ebenso mit allen höhern Ordnungen des Multiplicanden, so bekommt man so viele einzelne untereinanderstehende Theilproducte, als aus wie vielen Ziffern der Multiplicand besteht (Siehe die Beispiele.).

V. Alle diese Theilfacta bringe man nun, wie gewöhnlich, in eine Summe, so ist diese das verlangte Product.

Beweis. Eine Zahl wird mit einer andern multiplicirt, wenn alle einzelne Theile, woraus sie besteht, durch diese andere multiplicirt werden; denn was mit allen Theilen eines Ganzen geschieht, muß mit dem Ganzen selbst geschehen. Nun besteht aber ein gegebener Multiplicand aus den Ziffern aller Ordnungen (von der höchsten bis zu den Einern) und durch die obigen Vorschriften werden alle Ziffer desselben mit dem Multiplicator multiplicirt, allen diesen Producten, nach dem Gesetze der Gleichartigkeit, die gehörigen Stellen angewiesen, auch endlich alle diese einzelne Producte in **eine** Summe gebracht; folglich ist die Auflösung richtig.

Beispiele.

I.	79358642	Multiplicand	Factoren.
	6	Multiplicator	
	12	Einer.	
	24.	Zehner.	
	36..	Hunderter.	
	48...	Tausender.	
	30....	Zehntausender.	
	18.....	Hunderttausender.	
	54......	Einer von Millionen.	
	42.......	Zehner von Millionen.	
	476151852	Summe, oder Product.	

Hier soll der ganze Multiplicand sechsmal vergrößert werden, was offenbar geschehen wird, wenn man seine Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. bis zu den Zehnern von Millionen sechsmal größer macht. Dieses ist aber durch die Auflösung geschehen.

II.	8170592 / 8	Factoren.
	16	Einer.
	72.	Zehner.
	40..	Hunderter.
	0...	Tausender.
	56....	Zehntausender.
	8.....	Hunderttausender.
	64......	Einer von Millionen.
	65364736	Summe, oder Product.

§. 55. Anmerkung I. Aus dieser Auflösung (§. 54.) entsteht eine Art, die dortige Multiplication abzukürzen, welche denn auch, weil sie weniger Zeit kostet, anstatt jener immer gebraucht werden muß. Ein Beispiel soll dieses erläutern. Wenn man die Zahl 498735 mit 9 multipliciren sollte, so setze man diese Zahlen folgendergestalt:

498735 / 9	Factoren.
4488615	Factum.

Nun fange man, wie gewöhnlich, bei den Einern des Multiplicanden an, und sage: neunmal fünf Einer sind fünf und vierzig Einer, d. h. 4 Zehner und 5 Einer. Da nun die Einer nur unter Einer, und die Zehner unter Zehnern stehen können, so schreibe man die 5 in die Stelle der Einer, und behalte die 4 zu dem folgenden Producte aus den Zehnern im Sinne. Nun gehe man in die Stelle der Zehner. Nämlich 9 mal 3 Zehner sind 27 Zehner; hierzu die 4 Zehner des vorigen ersten Productes gesetzt, gibt 31 Zehner, d. h. 1 Zehner und 3 Hunderter. Diesen 1 Zehner schreibe man nun wieder unter die Zehner des Multiplicanden, und behalte die 3 Hunderter im Sinne, um sie zu den Hunderten, welche aus der Multiplication der 7 mit der 9 entstehen, zu setzen. —

Auf ähnliche Art fahre man nun immer in den höhern Ordnungen fort, und setze jedesmal zu dem Producte aus ihnen mit dem Multiplicator Dasjenige, was aus dem Factum der nächstniedrigern Stelle in diese höhere Ordnung gekommen ist, und dieses so lange, bis man die höchste Stelle des Multiplicanden durch den Multiplicator multiplicirt hat.

II. Kommen Nullen im Multiplicanden vor, so werden entweder 1) alle, oder 2) alle weniger einer in das Product gesetzt, z. B.

74000032 3	Factoren.	zu 1)
222000096	Product;	

oder:

83200075 7	Factoren.	zu 2)
582400525	Product.	

§. 56. **Aufgabe.** Eine Zahl, welche aus mehreren Ziffern besteht, durch eine andere, welche ebenfalls mehrere Ziffer enthält, zu multipliciren.

Auflösung.

I. Man setze die beiden Factoren mit ihren gleichnamigen Ordnungen untereinander, und ziehe einen Strich (Siehe die Beispiele.).

II. Man multiplicire (nach §. 55.) alle Stellen des Multiplicanden durch den Einer des Multiplicators. Eben so auch

III. Alle Ziffer des Multiplicanden durch den Zehner, den Hunderter, den Tausender u. s. f. durch alle folgende höhere Ordnungen des Multiplicators, und setze jedes dieser einzelnen Producte um eine Stelle weiter zur Linken, wie es die untern Beispiele zeigen, so bekommt man so viele besondere Producte, als aus wie vielen Ziffern der Multiplicator besteht. Alle diese bringe man

IV. Sodann (nach §. 55.) in **eine** Summe, so ist diese das gesuchte Product. Sollten etwa

V. In dem Multiplicator mehrere Nullen enthalten seyn, so muß dasjenige Product, welches aus der nächst=

folgenden Ziffer im Multiplicator mit dem Multiplicanden entsteht, um so viele Stellen zur Linken vorgerückt werden, als Nullen aufeinander folgen. (Siehe Beispiel II.).

Beweis. Nach §. 30, II. muß der Multiplicand so oft genommen werden, als wie oft der Multiplicator die Einheit enthält. Nun besteht aber, nach der Voraussetzung, der Multiplicator aus mehreren Theilen, d. h. aus Ziffern von verschiedenen Ordnungen; folglich muß der Multiplicand mit jeder dieser Ziffer multiplicirt werden. Dies rechtfertigt die Regel II. nach §. 55. Die Richtigkeit von III. und IV. beruht darauf, daß das zweite der Theilproducte mit seiner niedrigsten Stelle in den Zehnern beginnen muß, weil die zweite Ziffer des Multiplicators selbst ein Zehner ist. Ebenso muß das dritte Theilproduct seine niedrigste Stelle in den Hunderten haben, weil die dritte Ziffer des Multiplicators ein Hunderter ist u. s. w. Eben hierauf gründet sich auch die Regel V. Folglich ist das Verfahren der ganzen Auflösung gerechtfertigt.

Beispiele.

I.

8763942	Factoren.	
5837		
61347594	Das 7fache	einzelne Facta.
26291826	Das 30fache	
70111536	Das 800fache	
43819710	Das 5000fache	
51155129454	Summe, oder Hauptfactum.	

II.

9385276	Factoren.	
3005		
46926380	Das 5fache	des Multiplicanden.
28155828	Das 3000fache	
28202754380	Das 3005fache, oder verlangte Product.	

§. 57. Aufgabe. Eine Zahl mit einer andern, woran mehrere Nullen hängen, zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die gegebene Zahl mit der andern, ohne auf die Nullen Rücksicht zu nehmen, wie gewöhnlich (nach §. 55, 56.) und hänge alle vorhandenen Nullen an das entstandene Product zur Rechten.

Beweis. Man setze einmal, an dem Multiplicator seien drei Nullen, so ist dieses (nach §. 41.) soviel, als seien die andern Ziffer desselben mit 1000 multiplicirt. Wird also der Multiplicand ohne diese Nullen multiplicirt, so würde das Product 1000mal kleiner, als gefordert wird, und man muß, um es so groß zu machen, als es eigentlich seyn soll, an dasselbe die drei Nullen wieder anhängen, damit es hierdurch 1000mal größer werde. Ebendieses gilt auch von jeder andern Anzahl von Nullen an dem Multiplicator, und der Beweis ist demnach allgemein.

Beispiel. Man soll 8736983 mit 48000 multipliciren, so setze man dieses auf folgende Art:

8736983	Factoren.
48000	
69895864	Theilfacta, ohne die Nullen.
34947932	
419375184000	Product.

§. 58. Zusatz. Befinden sich sowohl an dem Multiplicanden, als an dem Multiplicator mehrere Nullen, so nehme man auf dieselben im Anfange keine Rücksicht, multiplicire lediglich die beiden Zifferzahlen mit einander, und hänge an das hieraus entstandene Product die Summe der Nullen von beiden Factoren. Wenn man z. B. 7848000 mit 9200 multipliciren sollte, so setze man

7848000 9200	Factoren.
15696 70632	Theilfacta, ohne die Nullen.
72201600000 Product.	

Denn indem man anstatt 7848000 nur 7848 als Multiplicanden annimmt, setzt man einen Factor, welcher 1000mal kleiner ist, als er seyn sollte (§. 41.), und folglich wird auch das Product selbst 1000mal kleiner, als es werden müßte. Da man ferner für 9200 nur 92 als Multiplicator gebraucht, so muß das Factum aus dieser Ursache ebenfalls 100mal kleiner werden, als es eigentlich seyn sollte (§. 41.). Folglich wird das Product, ohne die angehängten Nullen, 1000mal 100mal, d. h. 100000mal zu klein, und man muß es, um ihm seinen gehörigen Werth zu geben, wieder 100000mal größer machen, d. h. diese 5 Nullen müssen wieder zur Rechten angehängt werden.

§. 59. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Multiplication ist dieses $\times$, oder auch ein Punct, welcher zwischen die Factoren gesetzt wird. Z. B. $8 \times 10 \times 5 = 400$ heißt so viel, als: ein Product aus den Zahlen 8, 10 und 5 gibt die Zahl 400. Sollen aber noch mehrere Zahlen, welche durch die Zeichen $+$ und $-$ verbunden sind, mit einer dritten multiplicirt werden, so werden alle einzelne Zahlen, worauf sich die Multiplication bezieht, durch eine Parenthese eingeschlossen. Z. B. $(8+4-6) \,.\, 3$ ist soviel, als die Zahl, welche herauskommt, indem man zu 8 die 4 addirt, von dieser Summe die 6 hinwegnimmt und diesen Rest nun mit 3 multiplicirt. Daher ist $(8+4-6) \,.\, 3 = (12-6) \,.\, 3 = 6 \,.\, 3 = 18$. Ferner ist $(7-3+9+5) \,.\, 8 = (4+9+5) \,.\, 8 = 18 \,.$

8 = 144 u. s. w. Hieraus ergibt sich auch die Bedeutung folgender Multiplications-Ausdrücke:

$$(8-3+7-1) \times (9-2+3)$$

oder:

$$(7+5-8) \times (9-7+6) \times 100 \text{ u. s. w.}$$

IV. Die Division.

§. 60. Aufgabe. Eine Zahl, welche aus mehreren Ordnungen besteht, durch einen Einer zu dividiren.

Auflösung.

I. Man schreibe den Divisor zur Linken des gegebenen Dividenden, und söndere beide durch einen Senkstrich von einander ab. (Siehe die Beispiele.)

II. Nunmehr vergleiche man die höchste Ziffer des Dividenden mit dem Divisor, so ist dieselbe entweder eben so groß als der Divisor, oder sie ist größer oder kleiner. Im ersten Falle schreibe man eine 1 in den Quotienten, welcher immer zur Rechten des Dividenden gesetzt und ebenfalls durch einen Senkstrich von demselben getrennt wird. Im zweiten Falle untersuche man vermittelst des Einmaleins (§. 52.), wie oft der Divisor von dieser Ziffer abgezogen werden kann, und setze die Zahl, welche dieses anzeigt, ebenfalls in den Quotienten. In dem dritten Falle endlich nehme man die zweite Ziffer des Dividenden noch zu der ersten hinzu, und bestimme nunmehr auch wieder, wie oft der Divisor in diesen beiden Ziffern enthalten ist, wodurch ebenfalls wiederum der Quotient entsteht.

III. Man multiplicire nunmehr den nach II. gefundenen Quotienten mit dem Divisor, setze dieses Product, wenn es nur aus einer Ziffer besteht, unter die höchste; wenn es aber zwei Stellen enthält, unter die höchste und zunächst

folgende Stelle des Dividenden, und ziehe dasselbe von diesen Ziffern ab.

IV. Zu dem in III. etwa gebliebenen Reste nehme man die folgende nächstniedrigere Stelle des Dividenden herunter; untersuche, wie oft der Divisor hierin enthalten ist, schreibe die Ziffer, welche dieses anzeigt, in den Quotienten, multiplicire nun diese Stelle des Quotienten mit dem Divisor, ziehe dieses Product von dem gebliebenen Reste nebst der herunter genommenen Ziffer wieder ab; nehme von Neuem eine folgende Ziffer aus dem Dividenden, bestimme wieder einen neuen Theil des Quotienten, und fahre so lange mit dieser Arbeit fort, bis die letzte Ziffer des Dividenden herunter genommen worden ist.

V. Sollte es sich ereignen, daß in III. kein Rest geblieben und die folgende, vom Dividenden herunter genommene Ziffer kleiner als der Divisor wäre, so muß man in den Quotienten eine Nulle setzen, hierauf die folgende Stelle des Dividenden herunter nehmen, und im übrigen den obigen Regeln folgen, um die nachfolgenden Ziffer des Quotienten zu finden.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens, welche ihren Grund in dem Begriffe der Division (§. 34. u. f.) und in der Bedeutung der Ordnungen (§. 38. u. f.) der Ziffer hat, wird sich am Faßlichsten an einem Beispiele zeigen. Gesetzt also, die Zahl 83574 sollte durch 6 dividirt werden, so wird dieses gewiß geschehen, wenn alle Theile, woraus diese Zahl besteht, mit 6 getheilt werden. Denn wenn von jedem Theile dieser Zahl der sechste Theil genommen wird, so erhält man auch den sechsten Theil der ganzen Zahl. Nun besteht aber die obige Zahl aus ihren Ordnungen, oder es ist $83574 = 80000 + 3000 + 500 + 70 + 4$, es muß einerlei seyn, ob man diese Summe, oder die ganze Zahl 83574 selbst, durch 6 divi-

dirt. Man fange daher die Division bei der höchsten Stelle des Dividenden an, und sage: 6 in 80000 ist 10000mal enthalten; 6mal 10000 sind 60000, und diese 60000 von den 80000 abgezogen, lassen 20000 zum Reste übrig, in welchem der Divisor nicht mehr nach Zehntausendern; aber wohl nach niedrigern Ordnungen enthalten ist. Weil nun in dem Dividenden noch 3000 gegeben sind, so setze man dieselben zu dem gebliebenen Reste von 20000, welches eine Summe von 20000 + 3000 oder 23000 gibt. Diese nun wieder mit dem Divisor 6 getheilt, gibt 3000 zum zweiten Theile des Quotienten, welcher mit dem Divisor multiplicirt, 6 × 3000, oder 18000 bildet, und, von 23000 hinweggenommen, einen Rest von 5000 übrig läßt, worin der Divisor nun nicht mehr nach Tausendern; wohl aber nach Hundertern enthalten ist. Allein, in dem Dividenden sind noch 500 gegeben, folglich muß man dieselbe zu dem gebliebenen Reste setzen, und diese Summe 5500 von Neuem durch 6 dividiren. Dies gibt 900 zum dritten Theile des Quotienten. Das Product aus ihm in den Divisor wird 5400, und zum Reste bleiben 100, in welchen der Divisor nicht nach Hundertern, sondern nur nach Zehnern enthalten seyn kann. Aber, im Dividenden sind noch 70 gegeben. Man setze diese also wieder zu dem gebliebenen Reste, und dividire die Summe 170 von Neuem durch 6, so erhält man 20 zu dem folgenden Theile des Quotienten, welcher, mit 6 multiplicirt, 120, und zum Reste wieder 50 gibt, der den Divisor nur nach Einern in sich fassen kann. Kommen daher die im Dividenden vorhandenen 4 Einer dazu, so entsteht 54 zur Summe, welche den Divisor 6 gerade 9mal, ohne fernern Rest, enthält. Folglich wird 9 der letzte Theil des Quotienten. — Nach diesem Verfahren war nunmehr der Divisor 10000mal, 3000mal, 900mal, 20mal und 9mal, d. h. 13929mal im

Dividenden enthalten. Daher ist diese Zahl 13929 der gesuchte Quotient. Auch ist 13929 der sechste Theil von 83574. Alles dieses wird die hier folgende Rechnung, im Vergleiche mit dem eben gesagten, um so deutlicher machen.

Divisor. Dividend.

6|83574|

6|80000| 10000 I. Theil des Quotienten.

60000

addirt. { 20000 1ster Rest.
3000 II. Theil des Dividenden. }

6|23000| 3000 II. Theil des Quotienten.

18000

addirt. { 5000 2ter Rest.
500 III. Theil des Dividenden. }

6|5500| 900 III. Theil des Quotienten.

5400

addirt. { 100 3ter Rest.
70 IV. Theil des Dividenden. }

6|170| 20 IV. Theil des Quotienten.

120

addirt. { 50 4ter Rest.
4 V. Theil des Dividenden. }

6|54| 9 V. Theil des Quotienten.

54

00.

Werden nun in diesem Beispiele alle einzelnen Theile des Quotienten zusammengesetzt, so findet man ihn = $10000 + 3000 + 900 + 20 + 9 = 13929$.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß sich dieselbe nicht einzig auf das hier berechnete Beispiel beschränkt, sondern daß sie auch auf alle andere Divisionsfälle, welche diesem ähnlich sind, sich anwenden läßt. Daher ist die Richtigkeit der gegebenen Auflösungsweise allgemein bewiesen.

Daß man die Division nicht, wie es bei den drei früheren Rechnungsarten geschehen ist, in der niedrigsten Stelle der Zahlen, sondern mit der höchsten Ordnung beginnt, hat seinen Grund darin, daß man die aus diesen höhern Ordnungen bleibenden Reste sehr bequem in Einheiten der nächstniedrigern Ordnung verwandeln kann; aber nicht so leicht umgekehrt.

§. 61. Zusatz. Wenn der Divisor aus zwei Ziffern besteht, so vergleiche man die beiden höchsten Stellen des Dividenden mit ihm. Sind sie ihm gleich, so kommt in die höchste Stelle des Quotienten eine Eins. Ist der Divisor kleiner, so nehme man einstweilen zu dem Quotienten eine Ziffer, welche, nach dem Einmaleins, der Quotient aus der höchsten Ziffer des Divisors in die höchste des Dividenden ist. Mit dieser multiplicire man den ganzen Divisor, so wird, wenn das Product von den beiden höchsten Stellen des Dividenden abgezogen werden kann, der angenommene Quotient der richtige seyn. Ist aber dieses Product größer, als daß man es wirklich abziehen könnte, so muß man den Quotienten um eine Einheit so lange vermindern, bis dieser Abzug zunächst wirklich geschehen kann. — Ist aber der Divisor größer, als die beiden höchsten Stellen des Dividenden, so nehme man aus dem Dividenden drei Stellen, vergleiche nunmehr den Divisor mit denselben, und bestimme nach dem Obigen den Quotienten. Um die folgenden Ziffer des Quotienten

zu finden, verfahre man ganz nach den Regeln des vorigen §. und nach der so eben gegebenen Vorschrift.

Nachstehende Beispiele werden dieses erläutern. Das I. Beispiel zeigt im Besondern, wie man sich, zur Abkürzung der Rechnung, das Anschreiben der Nullen im Quotienten und in den Producten aus ihm in den Divisor ersparen kann.

I. Divisor. Dividend. Quotient.

```
8|9,46952|118369
  8 .....
  -------
  14 ....
   8 ....
  -------
   66 ...
   64 ...
   ------
    29 ..
    24 ..
    -----
     55 .
     48 .
     ----
      72
      72
      --
      00
```

Der achte Theil von 946952 ist daher 118369; so wie auch der 118369ste Theil von 946952 die Zahl 8 ist.

II. Divisor. Dividend. Quotient.

```
12|52,5384|43782
   48 ....
   -------
    45 ...
    36 ...
    ------
     93 ..
     84 ..
     -----
      98 .
      96 .
      ----
       24
       24
       --
       00
```

Der zwölfte Theil von 525384

ist demnach 43782. Sollte umgekehrt z. B. die Zahl 525384 Gulden unter 43782 Menschen gleich vertheilt werden, so würde jeder von ihnen 12 Gulden erhalten.

III. Divisor. Dividend. Quotient.

```
358|2662,90782|743829
     2506 .....
     ----
      1569 ....
      1432 ....
      ----
       1370 ...
       1074 ...
       ----
        2967 ..
        2864 ..
        ----
         1038 .
          716 .
         ----
          3222
          3222
          ----
          0000
```

Sollten z. B. 266290782 Gulden unter 743829 Menschen gleich ausgetheilt werden, so würde jeder 358 Gulden bekommen.

§. 62. Anmerkung. Sollten Fälle vorkommen, wo der Divisor eine aus 4, 5, 6, oder mehreren Ziffern bestehende Zahl ist; wo es also nicht so leicht in die Augen fällt, wie oft derselbe in irgend einem Theile des Dividenden enthalten seyn wird, so ist es sehr rathsam, sich zuvor in einem Täfelchen alle Vielfache des Divisors von 1 bis 9 zu verfertigen. Hierdurch geht man bei der Division ganz sicher zu Werke, indem man von diesen mehrfachen Producten immer nur jene zu suchen braucht, welche die höchsten sind, die von den jedesmaligen Ziffern des Dividenden gerade noch abgezogen werden können. Auch erspart man sich hierdurch die Mühe, manche Producte doppelt zu machen, welche entweder zu groß, oder zu klein angenommen wurden; ein Fall, welcher Anfängern, ehe sie die gehörige Uebung in Divisionsarbeiten haben,

nur zu oft widerfährt. Soll z. B. die Zahl 98768312493 durch 38572 dividirt werden, so setze man dieses wie gewöhnlich, und schreibe unter den Divisor alle Mehrfache desselben bis auf das Neunfache. Nämlich:

	Divisor.	Dividend.	Quotient.
1 faches	38572	98768,312493	2560622
2 —	77144	77144	2faches
3 —	115716	216243	
4 —	154288	192860	5faches
5 —	192860	233831	
6 —	231432	231432	6faches
7 —	270004	23992	
8 —	308576	0	0faches
9 —	347148	239924	
		231432	6faches
		84929	
		77144	2faches
		87853	
		87144	2faches
		709	Rest.

Dieser Rest heißt so viel, als die übrig gebliebene Zahl 709 soll, als ein Theil des ganzen Dividenden, noch durch den Divisor 38572 getheilt werden. Daß der hieraus entstehende Quotient kleiner als 1 seyn müsse, erhellet hieraus. Man denke sich eine Menge von 38572 Dingen, welche unter eine Anzahl von 38572 Personen gleich ausgetheilt werden sollen, so ist klar, daß jede Person eines dieser Dinge bekommen werde. Wären hingegen eben so viele Dinge unter mehrere Menschen, oder weniger Dinge unter eben so viele Menschen gleich auszutheilen, so wird wohl jeder derselben weniger als ein Ganzes dieser Dinge bekommen, d. h. der Quotient wird weniger als Eins, oder kleiner als Eins seyn müssen. Man sagt, daß der Quotient in diesem Falle ein Bruch d. h. ein Stück vom Ganzen sei; ein Wort, welches erst unten seine volle Erklärung bekommen wird.

§. 63. Willkührlicher Satz. Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunct (:), der zwischen den Dividenden, welcher vorhergeht, und den Divisor, welcher

nachfolgt, gesetzt wird. Z. B. 48 : 12 = 4, heißt soviel, als 48 dividirt durch 12 gibt 4 zum Quotienten. Eben so ist 144 : 24 = 6; 2648 : 4 = 662 u. s. w. Auch wird der Sinn folgender Ausdrücke verständlich seyn:

$$(384 - 76 + 210) : (712 - 85);$$

oder:

$$(5008 + 317 - 207) : (308 - 76 + 42) \text{ u. s. w.}$$

Eine andere Art, die Division zu bezeichnen, wird unten (in der Lehre von den Brüchen) vorkommen.

§. 64. Anmerkung. Die Multiplication und die Division dienen einander gegenseitig zu Proben (§. 36. V.)

A. Wenn man z. B. 382597 durch 263 multiplicirt, so entsteht, nach den gewöhnlichen Regeln, folgende Rechnung:

```
   382597 }
      263 } Factoren.
 --------
  1147791 }
 2295582. } Theilproducte.
765194..  }
---------
100623011  Factum.
```

Wird nun dieses Product durch den Multiplicator dividirt, so gibt der Quotient den Multiplicanden; und umgekehrt wird der Multiplicator zum Quotienten herauskommen, wenn man das Factum durch den Multiplicanden dividirt. Dies zeigen folgende Rechnungen:

```
I.  263 | 1006,23011 | 382597 Quotient, oder der
          789.....            vorige Multiplicand.
          ----
          2172....
          2104....
          -----
            683...
            526...
           -----
           1570..
           1315..
           -----
            2551.
            2367.
            -----
             1841
             1841
             ----
             0000
```

```
II.   382597—1006230,11 | 263 Quotient, oder der
       765194 . .             vorige Multiplicator.
       ———————
       2410361 .
       2295582 .
       ———————
        1147791
        1147791
       ———————
              0
```

B. Soll hingegen die Zahl 2157078 durch 46 dividirt werden, so ist die Rechnung diese:

```
46 | 215,7078 | 46893 Quotient.
     184 . . . .
     ————
      317 . . .
      276 . . .
      ————
       410 . .
       368 . .
       ————
        427 .
        414 .
        ————
         138
         138
         ————
           0
```

worin die Probe (nach §. 36. V.) so gemacht wird, daß ein Product aus dem Divisor in den Quotienten den Dividenden hervorbringen muß. Dies gibt hier Folgendes:

```
46893 Quotient }
   46 Divisor  } Faktoren.
———————
 281358
187572
———————
2157078 Factum, oder der vorige Dividend.
```

§. 65. Anmerkung. Wenn der Divisor nur eine Ziffer hat, so kann man die Division auf kürzere Zeit so verrichten, daß man die Producte aus den verschiedenen Stellen des Quotienten in

den Divisor in Gedanken macht, dieselbe ebenso von den gehörigen Ziffern des Dividenden hinwegnimmt, und nun bis ans Ende, wie gewöhnlich, fortfährt. z. B.

Divisor. Dividend. Quotient.
6 | 448992 | 74832.

Man sage: 6 in 44 geht 7mal; 6mal 7 sind 42, und diese von 44 abgezogen, lassen 2 übrig. Diese 2 (in Gedanken) neben die 8 gesetzt, gibt 28. Man sage nun wieder: 6 in 28 geht 4mal; 4mal 6 sind 24 und diese von 28 hinweggenommen, lassen 4 übrig u. s. w. bis zum Ende. Uebungen in dieser schnellern Auflösungsweise sind den Anfängern besonders zu empfehlen. Sie kann auch dann noch bequem angewendet werden, wenn der Divisor aus zwei Ziffern besteht.

§. 66. Aufgabe. Eine gegebene Zahl durch eine 1, woran mehrere Nullen hängen, zu dividiren.

Auflösung. Man schneide von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffer an dem Dividenden ab, als Nullen an dem Divisor sind, so geben die noch zur Linken stehenden, nicht abgeschnittenen Ziffer des Dividenden, den Quotienten, und die abgeschnittenen den zurückbleibenden Rest, wie in §. 62.

Beweis. Nach §. 41. ist jede Ziffer, welche einer andern unmittelbar zur Rechten steht, zehnmal kleiner als diese, vermöge ihrer Stelle. Nimmt man daher von einer Zahl die letzte Ziffer zur Rechten hinweg, so ist die unmittelbar zur Linken stehende, so wie jede der folgenden höhern Ziffer, um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt; folglich hat auch jede derselben einen zehnfach kleinern Werth bekommen, und die Zahl selbst ist zehnmal kleiner geworden (§. 16.), d. h. mit zehn dividirt. Hieraus erhellet ebenfalls, daß die gegebene Zahl hundertmal kleiner werden müsse, wenn man zur Rechten zwei Ziffer von ihr abschneidet. Und überhaupt ist klar, daß diese Zahl so vielmal zehnmal kleiner werden müsse, als wieviele Ziffer auf solche Weise abgeschnitten werden.

Beispiele. Es ist 879345 : 100 = 8793, nebst einem Reste von 45, der noch durch den Divisor 100 (nach §. 62.) getheilt werden soll. Ferner ist 793238: 10000 = 79, nebst dem Reste 3238.

§. 67. Zusatz. I. Sind auch an dem Dividenden mehrere Nullen, so werden so viele von ihm weggestrichen, als wieviele der Divisor an sich hat. Denn die Nullen des Dividenden vertreten, in Rücksicht des Werthes der noch folgenden Ordnungen in demselben, die Stelle von wirklichen Ziffern (§. 41); folglich tritt auch hier der Beweis von §. 66. ein. Z. B. 87395000 : 1000 = 87395. Oder 389000 : 100 = 3890; oder 738000 : 10000 = 738 : 10 = 73, nebst 8 als Rest, der ebenfalls noch durch 10 getheilt, d. h. in 10 gleiche Theile eingetheilt werden soll.

II. Man kann dieses auch folgendergestalt entwickeln. In dem ersten Beispiele (I.) ist 87395000 offenbar = 87395 × 1000 (§. 57.). Folglich ist auch 87395000 : 1000 = (87395 × 1000) : 1000. Wenn aber die Zahl 87395 zuerst mit 1000 multiplicirt und hierauf dieses Product wieder durch 1000 dividirt wird, so hebt eines das andere auf, und man bekommt wieder die Zahl 87395 (§. 36. VI.).

§. 68. Zusatz. Ist der Divisor eine Zahl, woran mehrere Nullen hängen; der Dividend aber eine Zahl ohne Nullen, welche indessen mehr Ziffer enthält, als der Divisor Nullen hat, so schneide man an dem Dividenden so viele Ziffer von der Rechten zur Linken ab, als an dem Divisor Nullen hängen; dividire nun, wie gewöhnlich, durch die Ziffer des Divisors den Dividenden, und setze die von dem Dividenden abgeschnittenen Ziffer neben den sich am Ende der Division etwa ergebenden Rest. Z. B.

```
12(00 | 94,837(25 | 7903
        84 ...
        ------
        108 ..
        108 ..
        ------
           37
           36
        ------
```

1. Zu diesem Reste die oben abgeschnittenen 25 des Dividenden gesetzt, gibt 125, welche man durch den Divisor 1200 eigentlich noch theilen soll. Der Grund dieses Verfahrens leuchtet aus dem unmittelbar Vorhergegangenen (§. 66. und 67.) ein und bedarf demnach keiner weitern Entwickelung. Indessen ist eine fortgesetzte Uebung den Anfängern zu empfehlen. Wenn sich am Divisor mehr Nullen befinden, als der Dividend Ziffer hat; z. B. wenn mit 6000 in 48 dividirt werden sollte, so hieße dieses so viel, als 48 sollte in 6000 gleiche Theile getheilt werden, wodurch der Quotient offenbar viel kleiner als 1 würde. Die Auflösung dieser Divisionsfälle gehört in die Lehre von den Decimalbrüchen, wovon nunmehr (dritte Abth.) gehandelt wird.

Dritte Abtheilung.

Von den Decimalbrüchen.

---

§. 69. Erklärung. Unser zehntheiliges Zahlensystem beruht auf den zwei willkührlichen Annahmen:

I. Man zähle auf zehn, und steige in den folgenden Ordnungen immer zum zehnfachen Höhern empor (§. 37. 38.).

II. Wenn mehrere Ziffer neben einander stehen, so hat jede, welche sich unmittelbar zur Linken der andern befindet, vermöge ihrer Stelle, einen zehnfach höhern; die unmittelbar zur Rechten stehende aber einen zehnfach kleinern Werth (§. 41.).

Wenn man nun zur Rechten der Einer einer gegebenen Zahl eine Ziffer setzt, und dasselbige Gesetz gelten läßt, so hat diese Stelle einen zehnfach kleinern Werth als die Stelle der Einer. Nun heißt aber der zehnte Theil von Eins ein Zehntel; folglich ist dieses die Stelle der Zehntel. Wird noch eine Ziffer zur Rechten dieser Zehntel gesetzt, so muß ihr Stellenwerth wiederum zehnmal kleiner werden. Nun ist aber der zehnte Theil von einem Zehntel offenbar der hunderte Theil der Einheit, oder ein Hundertel; daher ist diese neue Stelle jene

der Hundertel. Auf gleiche Weise entstehen alle folgenden Stellen, welche die Namen: Tausendtel, Zehntausendtel, Hunderttausendtel, Milliontel, u. s. f. erhalten. Solche Zahlen, welche zehnmal, hundertmal, tausendmal u. s. w. kleiner als Eins sind, heißen Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche. So ist z. B. drei Zehntel, oder neunzehn Hundertel, oder dreihundert fünf und achtzig Tausendtel u. s. f. ein Decimalbruch. Man kann daher auch so sagen: Decimalbrüche sind Zahlen, welche aus Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. der Einheit bestehen; oder: Decimalbrüche sind Zahlen, welche bestimmte Mengen der in 10, 100, 1000 u. s. f. gleiche Theile getheilten Einheit enthalten.

§. 70. Anmerkung. Dieses Entstehen und Benennen der Decimalbrüche kann nachfolgendes Beispiel aufklären:

...	4	8	7	5	1	2	9	6	4	4	8	7	5	...
	Millionen.	Hunderttausende	Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel	Milliontel	

woraus man sieht, daß sich zur Rechten der Einer (hier 9) eine endlose Reihe von Decimalbrüchen und zur Linken von ihr eine unendliche Reihe von decimalganzen Zahlen hinerstreckt.

§. 71. Willkührlicher Satz. I. Da bei mehreren neben einanderstehenden Ziffern die Ordnungen der Decimalbruchstellen bestimmt sind, sobald man weiß, welche Ziffer sich auf die Einer bezieht, so bezeichne man diese Stelle der Einer mit einem daneben gesetzten Comma, welches der Einerstrich heißt. So ist z. B.

354,7384

soviel, als: dreihundert vier und fünfzig Einer,

sieben Zehntel, drei Hundertel, acht Tausendtel und vier Zehntausendtel. Ferner:

87,3005 ist soviel als: sieben und achtzig Einer, drei Zehntel (kein Hundertel, kein Tausendtel) fünf Zehntausendtel. Endlich:

6,000004 heißt: sechs Einer, und vier Milliontel.

II. Wenn außer den Decimalbrüchen keine ganze Decimalzahlen gegeben sind, so schreibe man dahin, wo sonst die Einer stehen, eine Nulle, setze ihr zur Rechten den Einerstrich, und lasse nun die Decimalbrüche folgen. So heißt z. B.

0,643 soviel als: Keine Einer, sechs Zehntel, vier Hundertel, drei Tausendtel. Ferner ist: 0,07 so viel als: sieben Hundertel, u. s. f.

§. 72. Zusatz. I. Aus dem Bisherigen wird klar, daß 1 Zehner 10 mal größer, als 1, und 1 Zehntel 10mal kleiner, als 1 ist. Desgleichen ist 1 Hunderter 100mal größer; 1 Hundertel aber 100mal kleiner, als 1. Ferner ist 1 Tausender 1000mal größer; 1 Tausendtel aber 1000mal kleiner, als 1, u. s. f.

II. Gleichwie 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner einen Hunderter, 10 Hunderter einen Tausender u. s. f. bilden, so bilden auch 10 Tausendtel ein Hundertel, 10 Hundertel ein Zehntel, 10 Zehntel einen Einer u. s. w.

III. Sowie ein Tausender 10 Hunderter, ein Hunderter zehn Zehner, ein Zehner 10 Einer beträgt, so enthält auch ein Einer 10 Zehntel, ein Zehntel 10 Hundertel, ein Hundertel 10 Tausendtel u. s. f.

IV. Umgekehrt ist 1 Tausendtel der 10te Theil von 1 Hundertel, 1 Hundertel der 10te Theil von 1 Zehntel, 1 Zehntel der 10te Theil von 1 Einer, 1 Einer der 10te

Theil von 1 Zehner, 1 Zehner der 10te Theil von 1 Hunderter u. s. f.

V. Sowie z. B. der zehnte Theil vom Zehner oder der hunderte Theil vom Hunderter oder der tausende Theil vom Tausender u. s. f. einen Einer bildet, so betragen auch zehn Zehntel, oder hundert Hundertel oder tausend Tausendtel wiederum einen Einer.

VI. Auch bilden z. B. 100 Zehntel einen Zehner, 1000 Zehntel einen Hunderter, 10000 Zehntel einen Tausender u. s. f.; ferner 100 Zehntausendtel ein Hunderttel; 1000 Hunderttel einen Zehner; 10000 Hunderttausendtel ein Zehntel; 10 Zehntausendtel einen Tausendtel; 100000 Hundertel einen Tausender u. s. f. — Es ist sehr zweckmäßig, daß sich die Anfänger in Bestimmung dieser Verhältnisse eine gewisse Fertigkeit erwerben.

§. 73. Grundsatz. I. Da die Decimalbrüche Zahlen sind, weil sie Vielheiten der durch die Decimalbruchstellen bestimmten gleichartigen Einheiten enthalten (§. 69.), so haben auch die bekannten vier Rechnungsarten mit diesen zehntheiligen Brüchen Statt (§. 24.).

II. Da ferner diese Brüche nach demselbigen Gesetze entstehen, nach welchem die ganzen Decimalzahlen gebildet werden (§. 69.), so treten bei diesen vier Fundamentalrechnungen auch im Allgemeinen die nämlichen Regeln ein, wie bei der Rechnung in ganzen Zahlen, und eben hierin wird sich der große Vorzug der Rechnung mit Decimalbrüchen vor jener in gemeinen Brüchen zeigen.

§. 74. Erklärung. Decimalbrüche heißen reine, wenn sie keine ganze Decimalzahlen, sondern nur Decimalbruchtheile enthalten; z. B. 0,684; 0,039; 0,0008; 0,7634. Gemischte Decimalbrüche aber sind jene, welche

theils aus ganzen Decimalzahlen, theils aus Decimalbruchtheilen bestehen; z. B. 87,6423; 640,38; 17584,0064; 3,087 u. s. f.

§. 75. Aufgabe. Mehrere gegebene Decimalbrüche zusammen zu addiren.

Auflösung. I. Man setze die gegebenen Brüche so untereinander, daß die Stellen der Einer, welche entweder mit einer Ziffer oder mit einer Nulle ausgefüllt sind (§. 74.), in lothrechter Reihe untereinander stehen. (Siehe die Beispiele.)

II. Nachdem ein wagrechter Absönderungsstrich gezogen worden ist, fange man bei der niedrigsten Stelle die Addition so an und führe sie gerade so von der Rechten zur Linken fort, als wenn es ganze Decimalzahlen wären (§. 46.).

III. Schneidet man endlich an der hierdurch erhaltenen Zahl von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als jene der zu addirenden Zahlen Bruchstellen hat, welche aus den meisten derselben besteht, so entsteht die verlangte Summe.

Beweis. Die Regel I. folgt aus dem Grundsatze, daß nur gleichartige Größen zusammen addirt werden können (§. 27. I.). Die Regel II. fließt aus §. 73, II. und die Richtigkeit von III. erkennt man daher, daß die niedrigste Ziffer der Summe von derselbigen Art seyn muß, als von welcher die niedrigste Stelle jener der zu addirenden Zahlen ist, welche die meisten Decimalbruchstellen enthält.

Beispiele.

I. 0,6281 } zu addirende Brüche.
0,2317 }

0,8598 Summe.

II.	0,8364621	zu addirende Brüche.
	0,75823	
	1,5946921	Summe.

III.	384,627	zu addirende Brüche.
	72,63	
	10,7234	
	467,9804	Summe.

IV.	3,602	zu addirende Brüche.
	264,53102	
	0,64	
	13,0038	
	7,6	
	289,37682	Summe.

V.	0,000037	zu addirende Brüche.
	0,0006	
	0,0048	
	0,3000002	
	0,3054372	Summe.

§. 76. Anmerkung. I. Daß in den Beispielen II. III. und IV. die zu addirenden Brüche nicht aus gleichvielen Decimalbruchstellen bestehen, darf dem Anfänger nicht auffallend seyn, da man zur Rechten dieser Decimalbruchstellen so viele Nullen setzen kann, als man will, ohne ihren Werth zu verändern. So ist z. B. 17,643=17,6430=17,6430000 u. s. f. weil diese Nullen zur Rechten die Abwesenheit der folgenden Decimalbruchstellen in diesen Ordnungen andeuten.

II. Auch lassen sich gegebene Decimalbrüche noch auf eine andere Weise aussprechen. Es sei z. B. 0,64 der gegebene Bruch, so betragen die 6 Zehntel soviel als 60 Hundertel (§. 72.). Da nun noch 4 Hundertel vorhanden sind, so ist die Summe davon 64 Hundertel. Auf gleiche Art heißt 6,3 auch soviel, als 63 Zehntel; 32,74 soviel, als 3274 Hundertel; 0,7423 soviel, als 7423 Zehntausendtel; 0,000084 soviel als 84 Milliontel u. s. f.

III. Da nun 17,643 soviel heißt, als 17 Einer nebst 643 Tausendtel, so ist 17,6430 soviel als 17 Einer und 6430 Zehntausendtel und 17,6430000 soviel, als 17 Einer nebst 6430000 Zehnmilliontel u. s. f. Das Beispiel in IV. wäre also folgendes:

3,60200	zu addirende Brüche, welche alle durch das Anhängen der Nullen in Hunderttausendtel verwandelt worden sind.
264,53102	
0,64000	
13,00380	
7,60000	
289,37682	Summe, wie zuvor.

§. 77. Aufgabe. Die Subtraction in Decimalbrüchen zu verrichten.

Auflösung. I. Wenn der kleinere Bruch, er sei ein reiner oder ein gemischter, so viele Decimalbruchstellen, als der größere hat, so setze man ihn so unter diesen, daß die gleichartigen Stellen unter einander stehen, ziehe einen Strich, vollbringe die Subtraction, sowohl was das unmittelbare Abziehen, als auch was das etwaige Lehnen oder Borgen betrifft, gerade so, als wenn es ganze Zahlen wären, und schneide nun von der Rechten zur Linken so viele Ziffer als Bruchstellen ab, als jede der beiden Zahlen derselben hat. (Siehe die Beispiele I. II. III.)

II. Hat der kleinere Bruch weniger Bruchstellen, als der größere, so setze man sie wieder nach I. untereinander, schreibe die Ziffer, welche in dem größeren Bruche mehr, als in dem kleinern sind, unverändert unter den gezogenen Querstrich, und verfahre im Uebrigen nach I. (Siehe Beispiel IV. und V.)

III. Wenn in der kleinern Zahl mehr Bruchstellen, als in der größern vorkommen, so schreibe man sie gehörig (nach I.) unter einander, denke sich die in der größern Zahl noch fehlenden Stellen mit Nullen ausgefüllt,

subtrahire dann so, als wären es ganze Zahlen und schneide in der Summe von der Rechten zur Linken so viele Stellen ab, als Bruchstellen in der kleinern Zahl sind. (Siehe Beispiel VI. und VII.)

IV. Soll ein reiner oder gemischter Decimalbruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so denke man sich zur Rechten dieser Zahl so viele Nullen, als der abzuziehende Bruch Decimalbruchstellen hat, subtrahire wie in ganzen Zahlen und bestimme das Comma nach der Zahl der Bruchstellen des Subtrahenden wie in III. (Siehe Beispiele VIII. IX. und X.)

Beweis. Die Richtigkeit der I. Regel folgt theils aus §. 33, I., theils aus §. 73, II.; die Regel II. fließt aus §. 76, so wie auch die Regeln III. und IV.

Beispiele.

I.
0,8735 größerer Bruch.
0,4213 kleinerer Bruch.
———
0,4522 Rest.

II.
687,3496
49,1305
———
638,2191 Rest.

III.
74,30041
73,87965
———
0,42076 Rest.

IV.
0,8732654
0,39287
———
0,4803954 Rest.

V.
65,8725
9,76
———
56,1125 Rest.

VI.
0,7319^{000}
0,2617825
———
0,4701175 Rest.

VII.
39,7^{0000}
8,39862
———
31,30138 Rest.

VIII.
345,^{00000}
0,78324
———
344,21676 Rest.

IX.	86,0000	X.	1,00000
	34,8345		0,64329
	51,1655 Rest.		0,35671 Rest.

§. 78. Anmerkung. Auch bei den Subtractionen in Decimalbrüchen kann die Probe durch die Addition so gemacht werden, daß die Summe aus der kleinern Zahl und dem Reste der größern gleich seyn muß (§. 33. II.). Die Ausführung dieser Proberechnungen ist Anfängern sehr zu empfehlen. Desgleichen kann auch die Subtraction zur Probe der Addition dienen (§. 51.).

§. 79. Lehrsatz. Wenn man die Ziffer eines reinen oder gemischten Decimalbruchs unverändert läßt; aber den Einerstrich um eine Ziffer zur Rechten fortrückt, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal größer, d. h. mit 10 multiplicirt worden.

Beweis. Da der Einerstrich in dem reinen Decimalbruche die Stelle bezeichnet, wodurch die Zehntel, Hundertel, Tausendtel, u. s. f. bestimmt werden, so ist klar, daß durch das Vorrücken dieses Strichs um eine Stelle gegen die Rechte jede einzelne Ziffer des Bruches um eine Stelle mehr gegen die Linke rückt, wodurch die vorigen Zehntel nun zu Einern, die vorigen Hundertel nun zu Zehntel, die vorigen Tausendtel nun zu Hundertel werden u. s. f., so daß jede Decimalbruchstelle einen zehnmal höheren Werth erhält (§. 41.). Daher wird auch der ganze Bruch zehnmal größer, dessen Theile jene Bruchstellen sind.

Ist der Decimalbruch ein gemischter, so ist ebenfalls klar, daß die vorigen Einer nun zu Zehnern, die vorigen Zehner nun zu Hunderten u. s. f. alle folgende höhere Stellen zehnfach erhöht werden (§. 41.).

Beispiele. Daher ist $0,764 \times 10 = 7,64$; ferner $0,0835 \times 10 = 0,835$; und $87,6304 \times 10 = 876,304$; auch $8,0006 \times 10 = 80,006$ u. s. f. Denn wenn man

anstatt 0,764 dieses schreibt: 7,64, so sind die vorigen 7 Zehntel nun 7 Einer, die 6 Hundertel nun 6 Zehntel und die 4 Tausendtel nunmehr 4 Hundertel geworden, wodurch der ganze Bruch 7,64 offenbar zehnmal größer als 0,764 geworden ist.

§. 80. Zusatz. I. Wenn man also einen gegebenen Decimalbruch mit 10 multipliciren soll, so geschieht dieses dadurch, daß der Einerstrich um eine Stelle von der Linken zur Rechten fortgerückt wird.

II. Eben so klar ist nun auch, daß man den zehntheiligen Bruch mit 100 multiplicirt, wenn der Einerstrich um zwei Stellen zur Rechten fortschreitet. So ist z. B. $0,6874 \times 100 = 68,74$; ferner $16,832 \times 100 = 1683,2$; oder $0,00863 \times 100 = 0,863$; endlich $8,37 \times 100 = 837$ u. s. f.

III. Auf gleiche Weise wird auch $0,4387 \times 1000 = 438,7$; $73,85219 \times 1000 = 73852,19$; $0,346 \times 1000 = 346$; $0,73805 \times 10000 = 7380,5$ u. s. w.

IV. Dies gibt überhaupt die Regel: Ein Decimalbruch wird mit 1, woran sich eine oder mehrere Nullen befinden (d. h. mit 10, 100, 1000, 10000, u. s. w.), multiplicirt, wenn man den Einerstrich des Bruchs um soviele Stellen zur Rechten fortrücken läßt, als wieviele Nullen sich an der 1 befinden.

V. Sind mehr Nullen an der 1, als Bruchstellen an dem Bruche, so fällt der Einerstrich ganz hinweg, und man muß jenen Ueberschuß von Nullen zur Rechten des Decimalbruches setzen. Denn es ist z. B. $0,684 \times 10000 = 0,684 \times 1000 \times 10 = 684 \times 10$ (IV.) $= 6840$. Desgleichen wird $6,32 \times 100000 = 6,32 \times 100 \times 1000 = 632 \times 1000$ (IV.) $= 632000$. Endlich ist $0,0005 \times 1000000 = 0,0005 \times 10000 \times 100 = 5 \times 100 = 500$ u. s. f.

§. 81. Aufgabe. Einen Decimalbruch mit einer

ganzen Zahl, woran sich keine Nullen befinden, zu multipliciren.

Auflösung. Man setze den Multiplicator so unter den zu multiplicirenden Bruch, als wenn beide Factoren ganze Zahlen wären, und schneide, nachdem die Multiplication gerade so wie bei diesen Zahlen ist verrichtet worden, sodann an dem Producte von der Rechten zur Linken so viele Ziffer ab, als sich Decimalbruchstellen an dem Multiplicanden befinden. (Siehe die Beispiele.)

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils darauf, daß die Decimalbrüche nach dem zehntheiligen Gesetze gebildet sind (§. 73. II.), theils aber darauf, daß das Product in der niedrigsten Ziffer offenbar von der nämlichen Bruchstelle seyn muß, von welcher auch der Multiplicand in seiner niedrigsten Ordnung ist. Denn wenn im Beispiele I. die 5 Hunderttausendtel mit 7 multiplicirt werden, so muß das Product ebenfalls wieder Hunderttausendtel enthalten u. s. w.

Beispiele.

I.

	0,38465	Factoren.
	7	
	2,69255	Product.

II.

	0,864237	Factoren.
	58	
	6913896	Theilfacta.
	4321185	
	50,125746	Product.

III.

	34,6254
	9
	311,6286

IV.

	51,00062
	28
	40800496
	10200124
	1428,01736

§. 82. Anmerkung. Hätte die ganze Zahl mehr Stellen, als der Decimalbruch, so schreibe man jene als Multiplicanden über

diesen als Multiplicator, und verfahre wie vorhin (in §. 81.). Denn einerlei Factoren geben, auch in verkehrter Ordnung, einerlei Product (§. 30. IV.), z. B. $0{,}33 \times 8725 = 8725 \times 0{,}33$, welches folgende Rechnung gibt.

87 25 0,33	Factoren.
261 75 2617 5	Theilfacta.
2879,25	Product.

§. 83. Zusatz. Sollte man einen gegebenen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl, woran sich eine Nulle oder mehrere Nullen befinden, multipliciren, so verfahre man in Rücksicht der ganzen Zahl nach §. 81. und 82.; in Hinsicht der Nullen aber nach §. 79. und 80. Folgende Beispiele erläutern dieses:

Beispiele.

I. 0,6432 840 25728 51456 540,288	Denn $0{,}6432 \times 840$ $= 0{,}6432 \times 84 \times 10$ $= 54{,}0288 \times 10 = 540{,}288.$
II. 25,34 1300 7602 2534 32942	Denn $25{,}34 \times 1300 = 25{,}34 \times 13 \times 100 = 329{,}42 \times 100 = 32942.$
III. 8,532 70000 597240	Denn $8{,}532 \times 70000 = 8{,}532 \times 7 \times 10000 = 59{,}724 \times 10000 = 597240.$

IV. $6,3 \times 425900 = 425900 \times 6,3$ oder

$$\begin{array}{r} 425900 \\ 6,3 \\ \hline 127770 \\ 255540 \\ \hline 2683170,0 \end{array}$$

d. h. das Product ist 2683170.

§. 84. Aufgabe. Einen gegebenen Decimalbruch mit einem gegebenen Decimalbruche zu multipliciren.

Auflösung. Man schreibe den aus den wenigsten Ziffern bestehenden Factor so unter den andern Factor, daß die niedrigsten Stellen beider untereinander stehen, verrichte die Multiplication gerade so, wie bei ganzen Zahlen, und schneide an dem Producte von der Rechten zur Linken soviele Stellen ab, als die Summe der Bruchstellen in beiden Factoren beträgt. (Siehe die Beispiele.)

Beweis. Die Richtigkeit der Theilfacta und der Ziffer des Products folgt aus §. 73. — Daß aber auch die Stelle des Einerstrichs die richtige sei, läßt sich sehr faßlich in einem Beispiele zeigen. Es sei 0,348 mit 0,26 zu multipliciren, so besteht die niedrigste Stelle des Multiplicanden aus Tausendtel und jene des Multiplicators aus Hundertel. Werden diese Stellen mit einander multiplicirt, so müssen in der niedrigsten Ziffer des Products nothwendig Hunderttausendtel erscheinen, da Tausendtel mit Hundertel multipliciren soviel heißt, als den hunderten Theil von Tausendtel nehmen und der hunderte Theil von dem tausendten Theile der Einheit natürlich der hunderttausende Theil dieser Einheit ist. — Dieser Beweis kann auf alle andere Fälle angewendet und noch dadurch erläutert werden, daß (in ganzen Zahlen) Tausende mit Hunderten multiplicirt,

Hunderttausende gibt. Eben so muß man daher aus der Multiplication von Tausendtel mit Hundertel auch Hunderttausendtel erhalten, u. s. w.

Beispiele.

I.

0,623	Factoren.
0,48	
4984	
2492	
0,29904	Product.

II.

0,32542	Factoren.
0,213	
97626	
32542	
65084	
0,06931446	Product.

III.

35,2782	Factoren.
0,9	
31,75038	Product.

IV.

132,8324	Factoren.
0,0053	
3984972	
6641620	
0,70401172	Product.

V. $8,63 \times 0,000005$

0,00004315 Product.

VI.

43,21	Factoren.
7,38	
34568	
12963	
30247	
318,8898	Product.

VII. $0,000006 \times 0,00004 = 0,00000000024.$

§. 85. Anmerkung. Wenn man das I. und II. Beispiel des vorigen §. genauer betrachtet, so ergibt sich sogleich, daß jedes der dortigen Producte kleiner, als jeder seiner Factoren ist. In ganzen Zahlen hat dieses niemals Statt. Allein da alle reine

Decimalbrüche nur Theile der Einheit enthalten, so heißt: einen Decimalbruch mit einem andern multipliciren, soviel als von jedem einen ein solches Stück nehmen, als der andere es anzeigt, wodurch nothwendig eine Verkleinerung im Producte entstehen muß.

§. 86. Anmerkung. Der Beweis von §. 84. kann auch noch auf folgende Art geführt werden. Wenn z. B. 0,643 mit 0,25 multiplicirt werden sollte und man multiplicirte die ganze Zahl 643 mit der ganzen Zahl 25, so würde das Product 16075 (da jener Factor 1000mal, dieser aber 100mal zu groß ist) natürlich 100000mal zu groß werden. Daher muß man dasselbe, um ihm seine wahre Größe zu geben, wieder 100000mal kleiner machen, wodurch die 5 Einer zu 5 Hunderttausendtel werden, welches daher offenbar 0,16075 zum richtigen Producte gibt.

§. 87. Lehrsatz. Wenn die Ziffer eines gegebenen reinen oder gemischten Decimalbruchs unverändert bleiben; der Einerstrich aber um eine Stelle zur Linken gerückt wird, so ist der ganze Bruch hierdurch zehnmal kleiner, d. h. mit 10 dividirt worden.

Beweis. Durch dieses Verrücken des Einerstriches werden die Zehntel des gegebenen Bruchs zu Hundertel, seine Hundertel zu Tausendtel, seine Tausendtel zu Zehntausendtel u. s. w. Enthält er aber auch noch Ganze, so werden dessen Einer zu Zehntel, seine Zehner zu Einer, seine Hunderter zu Zehner u. s. w. Der gegebene Bruch wird daher in allen seinen Theilen zehnmal kleiner, folglich auch im Ganzen. (§. 41.)

Beispiele. Demnach ist 0,684 : 10 = 0,0684; ferner 0,034 : 10 = 0,0034; auch 28,67 : 10 = 2,867; 314,006 : 10 = 31,4006 u. s. f. Denn wenn man statt 0,684 den Bruch 0,0684 setzt, so sind aus den vorigen 6 Zehntel nun 6 Hundertel, aus den früheren 8 Hundertel nun 8 Tausendtel und aus den 4 Tausendtel nun 4 Zehntausendtel geworden. Folglich muß der neue Bruch zehnmal kleiner, als der gegebene seyn.

§. 88. Zusatz. I. Um einen Decimalbruch mit 10 zu dividiren, darf man daher nur den Einerstrich um eine Stelle zur Linken fortrücken.

II. Auch wird der gegebene Bruch mit 100 dividirt, wenn der Einerstrich um zwei Stellen zur Linken fortschreitet. So ist z. B. 264,382 : 100 = 2,64382; 7,3421 : 100 = 0,073421; 87,6 : 100 = 0,876 u. s. f. Denn durch dieses Verrücken des Einerstrichs wird jede Stelle des Dividenden hundertmal kleiner am Werthe (§. 41.).

III. Desgleichen ist 8734,27 : 1000 = 8,73427; 50432,7 : 1000 = 50,4327. Ebenso wird 385425,32: 10000 = 38,542532 u. s. w.

IV. Hieraus fließet im Allgemeinen die Regel: Um einen Decimalbruch mit einer 1, woran sich mehrere Nullen befinden, zu dividiren, rücke man den Einerstrich um soviele Stellen zur Linken, als wieviele Nullen die 1 bei sich hat. Befinden sich aber nicht soviele abzuschneidende Stellen in dem Dividenden, als wieviele Nullen der Divisor hat, so müssen die noch fehlenden Stellen mit Nullen ersetzt und zur Linken am Dividenden angehängt werden. So ist z. B. 0,83 : 10000=0,000083. Hier sollen die 3 Hundertel des Dividenden mit 10000 dividirt, d. h. 10000mal verkleinert werden, wodurch offenbar 3 Milliontel entstehen, welche der Quotient darstellt u. s. w. Ferner ist: 84,6 : 1000000=0,0000846. Da der Dividend nur zwei Stellen zur Linken des Einerstrichs; der Divisor aber sechs Nullen enthält, so müssen noch 6—2, d. h. 4 Nullen zur Linken der 8 gesetzt, und außerdem muß noch eine Nulle (die fehlenden Einer bezeichnend) beigefügt werden.

§. 89. Aufgabe. Den Rest, welcher öfters bei der Division in ganzen Zahlen (§. 62.) entsteht, durch Decimalbruchtheile auszudrücken.

Auflösung. I. Man hänge zur Rechten des Restes eine Nulle und dividire mit dem Divisor hinein, so findet man die Zehntel des Quotienten, welche neben den Einerstrich desselben gesetzt werden. Das Product aus diesen Zehnteln in den Divisor ist nun entweder dem mit einer Nulle versehenen Reste gleich, oder kleiner als derselbe. Im ersten Fall ist die Division vollkommen geschlossen. (Siehe Beispiel I.)

II. Im zweiten Falle aber hänge man an den neuerdings bleibenden Rest abermals eine Nulle, dividire mit dem Divisor hinein, so erhält man die Hundertel des Quotienten. Auf solche Weise fahre man

III. nach I. und II. so lange fort, bis sich die Division entweder schließet, oder bis die gefundenen Decimalbruchtheile des Quotienten so klein geworden sind, daß man (für den Fall der gegebenen Rechnung) keine kleinere zu finden braucht. (Siehe die Beispiele.)

Beweis. Der Rest, welcher bei gewöhnlichen Divisions-Aufgaben in ganzen Zahlen bleibt, besteht in seiner niedrigsten Stelle aus Einern. Durch das Anhängen einer Nulle werden diese mit 10 multiplicirt (§. 57.). Daher muß der Quotient aus dem Divisor in diesen zehnmal vergrößerten Dividenden auch zehnmal größer seyn, als er eigentlich werden sollte, und man muß ihn somit wieder zehnmal kleiner machen, als die Einer, die er enthält. Folglich gibt dieser Quotient nunmehr Zehntel. Hieraus fließet die Richtigkeit der I. Regel. Die Regel II. und III. folgt aus demselbigen Grunde, und nachstehende Beispiele werden sie noch mehr aufklären.

Divisor. Divid. Quotient.

```
I.   5 | 3827  | 765,4
         35
        ----
          32
          30
        ----
           27
           25
        ----
            20 Rest mit 1 Nulle vermehrt.
            20
        ----
            00
```

Hier bleiben 2 Einer zum Reste, in welchen der Divisor 5 nicht mehr nach Einern enthalten ist. Durch Anhängen der Nulle wird dieser Rest 10mal zu groß und man muß ihn, um ihm seinen gehörigen Werth zu geben, wieder 10mal kleiner machen, wodurch 4 Zehntel entstehen. Daher ist 5 in 3827 nicht bloß siebenhundert fünf und sechszigmal ganz, sondern noch weiter vier zehntelmal enthalten, d. h. der zehnte Theil von 5 ist noch viermal darin enthalten.

Divisor. Dividend. Quotient.

```
II.   8 | 389  | 48,625
          32
         ----
          69
          64
         ----
          50 Rest mit 1 Nulle.
          48
         ----
           20 II. Rest mit 1 Nulle.
           16
         ----
            40 III. Rest mit 1 Nulle.
            40
         ----
            00
```

Hier hat sich die Division erst in den Tausendtel genau abgeschlossen.

```
     Divisor. Divid. Quotient.
III.    12 | 857  | 71,4166 . . . .
             84
            ----
              17
              12
             ----
               50 Rest mit 1 Nulle.
               48
              ----
                20 Rest mit 1 Nulle.
                12
               ----
                 80 Rest mit 1 Nulle.
                 72
                ----
                  80 Rest mit 1 Nulle.
                  72
                 ----
                   8 Rest, der sich mit der nämlichen
                        Ziffer 8 immerfort wiederholt.
```

Hier geht der Quotient ins Unendliche fort, welches man durch die neben ihm stehenden Puncte bezeichnet. Auch kommt in jede folgende Decimalbruchstelle die Ziffer 6 zu stehen. Wie viele von diesen Stellen man zu nehmen habe, hängt von dem Grade der Schärfe ab, womit der Quotient bestimmt werden soll. Wäre die Einheit z. B. ein Fuß, so ist der tausendte Theil schon so klein, daß er meist für unerheblich angesehen und deshalb vernachläßigt werden kann. Wäre sie dagegen eine deutsche Meile, welche aus 25380,076 bayerischen Fuß besteht, so müßte der obige Quotient noch genauer bestimmt werden.

§. 90. Zusatz. Es ist lehrreich für Anfänger, diese Decimalbruchstellen des Quotienten bei verschiedenen Divisoren

(von 2 bis 9 z. B.) genauer kennen zu lernen. Hierzu dienen folgende Beispiele:

I. 2 | 17 | 8,5 ohne Rest.

II. 3 | 28 | 9,33 . . . . ins Unendliche, mit gleichen Ziffern, jede=3. Es kann demnach der dritte Theil von 28 in Ganzen und Decimalbruchtheilen nicht genau angegeben werden.

27
———
10
9
———
10

III. 4 | 31 | 7,75 ohne Rest. Der vierte Theil von 31 ist demnach ganz genau=7,75.

28
———
30
28
———
20
20
———
00

IV. 5 | 651 | 130,2 ohne Rest. Es ist daher der fünfte Theil von 651 ganz genau = 130,2.

5
———
15
15
———
10
10
———
00

V. 6 | 38 | 6,33 . . . ins Unendliche, mit gleichen Ziffern, jede = 3. Ebenso wie oben bei II.

36
———
20
18
———
20

VI. 7 | 22 | 3,1428571 . . . . . ins Unendliche, mit periodischer Wiederholung der sechs Ziffer 142857, welche bei der Division mit 7 immer stattfindet, wenn der Dividend nicht genau ein Mehrfaches von 7 ist.

```
21
--
10
 7
--
30
28
--
20
14
--
60
56
--
40
35
--
50
49
--
10 Rest, wie oben.
```

VII. 8 | 75 | 9,375 ohne Rest. Es ist demnach z. B. der achte Theil von 75 Ruthen soviel als 9 Ruthen, 3 Fuß, 7 Zoll und 5 Linien ganz genau.

```
72
--
30
24
--
60
56
--
40
40
--
00
```

VIII. 9 | 32 | 3,55 . . . . ins Unendliche, mit Wiederholung der Ziffer 5. Der neunte Theil von 32 kann daher durch keinen gemischten Decimalbruch genau ausgedrückt werden.

```
27
--
50
45
--
50
45
--
50
```

Weil 2 in 10; 4 in 100; 5 in 10; 8 in 1000 ohne Rest aufgeht. so bricht auch die Division in I., III., IV., VII. einmal ab. Da aber weder 3, noch 6, noch 7, noch 9 Factoren von 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. ohne Rest sind, so geht in II, V., VI. und VIII. die Reihe der Decimalbruchstellen des Quotienten ins Unendliche fort.

§. 91. Anmerkung. Es ist bemerkenswerth, daß sich hier (d. h. in der Elementar-Arithmetik) schon eine Annäherung ins Unendliche zeigt, durch welche man dem vorgesteckten Ziele (z. B. dem in Decimalbruchstellen darzustellenden 9ten Theile von 32 [in VIII.] zwar immer näher und näher rücken, dasselbe aber dennoch niemals ganz genau erreichen kann. Anfängern ist zu rathen, daß sie diese Divisionen mit Divisoren über 9, z. B. mit 11, 12, 13 u. s. w. fortsetzen.

§. 92. Aufgabe. Einen gegebenen Decimalbruch durch eine ganze Zahl, welche weniger Ziffer als er selbst hat, zu dividiren.

Auflösung. I. Man dividire mit dem Divisor gerade so in den Decimalbruch, als wenn dieser auch eine ganze Zahl wäre, und setze die niedrigste Ziffer des Quotienten in jene Bruchstelle, welche mit der niedrigsten Ziffer des Dividenden einerlei ist. (Siehe Beispiel I.)

II. Bleibt in I. noch ein Rest, so hänge man eine Nulle an, und bestimme sodann die folgenden Decimalstellen nach §. 89. so genau als dieses, wenn sich die Division nicht abschließet, das practische Bedürfniß erfordert (§. 89.). (Siehe die Beispiele.)

Beweis. Die Regel I. beruht darauf, daß durch das Theilen des ganzen Bruchs auch dessen niedrigste Stelle getheilt werden muß, wodurch die niedrigste Stelle des Quotienten die nämliche Ordnung erhält. Der Grund von Regel II. liegt in §. 89.

Beispiele.

I. 15 | 0,36825 | 0,02455 ohne Rest.

```
15 | 0,36825 | 0,02455
     30
     ---
      68
      60
      ---
       82
       75
       ---
        75
        75
        ---
        00
```

Probe.

```
0,02455 } Factoren.
     15 }
-------
  12275
 02455
-------
0,36825  Product.
```

Hier mußte man so rechnen: 15 Einer in 0 Einern des Dividenden sind nicht nach Einern enthalten; daher die erste Nulle im Quotienten mit ihrem Einerstriche. Ferner sind diese 15 Einer in den 3 Zehntel nicht nach Zehntel enthalten; daher die zweite Nulle im Quotienten. Allein 15 sind im 36 Hundertel des Dividenden 2mal nach Hundertel enthalten; daher die Ziffer 2 im Quotienten, u. s. w.

II. 8 | 0,345 | 0,043125 ohne Rest. Auch hier und in den folgenden Beispielen sind die Proberechnungen den Anfängern zu empfehlen.

```
8 | 0,345 | 0,043125
    32
    ---
     25
     24
     ---
      10
       8
      ---
       20
       16
       ---
        40
        40
        ---
        00
```

Hier mußte man, da ohnedies keine Ganze vorhanden sind, sagen: 8 in 3 Zehntel ist nicht nach Zehntel enthalten. Daher kommt eine Nulle in die Stelle der Zehntel des Quotienten. Nun heißt es: 8 in 34 Hundertel ist 4mal nach Hundertel enthalten u. s. w.

III. 126 | 0,261 | 0,0020714 . . . . ohne Ende.

```
       252
      ----
       900
       882
      ----
       180
       126
      ----
        540
        504
       ----
         36 Rest.
```

Hier sind keine Zehntel und keine Hundertel des Quotienten vorhanden, weil 126 Einer erst in 261 Tausendtel nach Tausendtel zweimal enthalten sind.

IV. 5 | 38,025 | 7,605 ohne Rest, da hier 5 der Divisor ist, wobei die Division sich nothwendig einmal abschließen muß (§. 90.).

```
    35 . . .
    --------
     30 . .
     30 . .
    -------
       25
       25
      ----
       00
```

§. 93. Zusatz. I. Wenn der Dividend weniger Ziffer als der Divisor enthält, so befolgt die Rechnung einen ähnlichen Gang, wie nachstehende Beispiele und ihre Entwickelungen lehren.

I. 152 | 0,32 | 0,0021 . . . ohne Ende.

```
320
304
———
 160
 152
———
   8 Rest.
```

Hier heißt es: 152 Einer sind in keinen Einern keinmal enthalten (1ste Nulle des Quotienten); 152 Einer sind in 3 Zehntel nicht nach Zehntel enthalten (2te Nulle des Quotienten); 152 Einer sind in 32 Hundertel nicht nach Hundertel enthalten (3te Nulle des Quotienten); 152 Einer sind in 320 Tausendtel zweimal nach Tausendtel enthalten (1ste Ziffer des Quotienten) u. s. w.

II. 246 | 0,09 | 0,00036 . . . ohne Ende.

```
900
738
————
 1620
 1476
————
  144 Rest. Die Probe hierüber ist diese:
```

```
0,00036 Quotient } als Factoren.
    246 Divisor  }
———————
    216
   144
   72
———————
0,08856 Product } addirt
    144 Rest    }
———————
0,09000 d. h.
0,09 als Dividend.
```

```
III.   25 | 1 | 0,04 ohne Rest.
           100
           100
           ---
           000
```

II. Wenn Dividend und Divisor gleichviele Ziffer haben; aber der letztere größer, als der erstere ist, so wird auf gleiche Weise gerechnet. Z. B.

```
I.     15 | 12,3 | 0,82 ohne Rest.
            12 0
            ----
              30

II.    18 | 13,4 | 0,744 . . . ohne Ende.
            12 6                     Probe.
            ----              0,744 ⎫
              80                 18 ⎭ Factoren.
              72              -----
              --               5952
               80              744
               72             -----
               --             13392
                8 Rest.           8
                              ------
                              13,400  Product.
```

§. 94. Aufgabe. Eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren.

Auflösung. Man hänge zur Rechten an den Dividenden so viele Nullen, als wie viele Decimalbruchstellen der Divisor hat, und dividire nun, nach dem vorigen §. mit dem Decimalbruche, als wäre er in allen seinen Stellen eine ganze Zahl, in den mit Nullen versehenen Dividenden, so findet man den richtigen Quotienten.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens ergibt sich am Faßlichsten aus einem Beispiele. Wenn man z. B. 346 mit 0,82 dividiren soll, so wird der Quotient derselbige bleiben, wenn man sowohl den Divisor als den

Dividenden mit der nämlichen dritten Zahl multiplicirt. Dieses folgt einfach aus den Sätzen von der Division in Zahlen überhaupt. Denn es ist z. B. 12 : 4=3; 120 : 40=3; 1200 : 400 = 3; 12000 : 4000 = 3 u. s. w. Daher ist nun auch 346 : 0,82 =346 × 100 : 0,82 ×100 =34600 : 82, welches folgende Rechnung gibt:

```
I.    82 | 34600 | 4219,5 . . . ohne Ende.
           328
           ---
            180
            164
            ---
             160
              82
             ---
              780 Rest nebst der Nulle.
              738
              ---
               420
               410
               ---
                10 Rest.

II.   46:  13,581 | 46000:13581, oder
      13581 | 46000 | 3,36 . . . ohne Ende.
              40743
              -----
               52570
               40743
               -----
               118270
                81486
               ------
                36784 Rest.

III.  12:19,7 = 120:197, oder
      197 | 120 | 0,609 . . . ohne Ende. Auch hier
            1200              sind die Proberechnungen
            1182              zweckmäßig.
            ----
             1800
             1773
             ----
               27 Rest.
```

§. 95. Aufgabe. Einen Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren.

Auflösung. Man rücke in dem Dividenden den Einerstrich um so viele Ziffer zur Rechten fort, als wie viele Decimalbruchstellen sich in dem Divisor befinden (wobei man noch zuweilen an den Dividenden wird Nullen zu hängen haben) und dividire nun mit dem Divisor, als wäre er eine reine ganze Zahl, den neuen Dividenden (nach §. 62., 93.). Auch kann man, wenn der Divisor weniger Bruchstellen, als der Dividend hat, den Einerstrich an beiden weglassen, aber dem Divisor so viele Nullen zur Rechten beifügen, als die Differenz jener Bruchstellen beträgt. (Siehe Beispiele III. und V.)

Beweis. Da nach dieser Verfahrungsart sowohl der Divisor als Dividend mit der nämlichen Zahl multiplicirt worden ist, so bleibt der Quotient unverändert (§. 94.). Das Uebrige der Auflösung beruht auf der Richtigkeit des §. 92. und 93.

Beispiele.

I. 0,324 | 0,875 ist so viel als

324 | 875 | 2,7006 . . . ohne Ende.

648

2270

2268

2000

1944

56 Rest.

Hier hat der Divisor so viele Bruchstellen als der Dividend. Daher gleichet diese Division mit Brüchen einer Division in ganzen Zahlen.

II. 0,14 | 0,634 ist so viel, als
14 | 63,4 | 4,528 . . . ohne Ende.
56
―
74
70
―
40
28
―
120
112
―
8 Rest.

III. 0,254 | 0,3874 heißt so viel, als
2540 | 3874 | 1,525 . . . ohne Ende.
2540
―
13340
12700
―
6400
5080
―
13200
12700
―
500 Rest.

IV. 3,14 | 0,6 ist so viel, als
314 | 600 | 0,19108
314
―
2860
2826
―
340
314
―
2600
2512
―
88 Rest.

V. 8,5 | 31,006 ist so viel, als
8500 | 31006 | 3,64 . . . ins Unendliche.
25500
―――――
55060
51000
―――――
40600
34000
―――――
6600 Rest.

VI. 34,23 | 0,1 ist so viel, als
3423 | 10 | 0,0029 . . . . ohne Ende.
10000
6846
―――――
31540
30807
―――――
733 Rest.

§. 96. Anmerkung. Da sich die Multiplication und die Division gegenseitig zu Proben dienen (§. 36. V.), so können alle seitherige Multiplications-Beispiele zugleich auch als Divisions-Uebungen, und ebenso alle Divisions-Beispiele als Multiplications-Uebungen benützt werden. Diese Rechnungen wirklich durchzuführen, ist den Anfängern sehr zu empfehlen. Auch kann man bei jedem der in §. 95. angeführten sechs Beispiele mit dem gefundenen Quotienten in den Dividenden dividiren, um den ersten Divisor zu erhalten.

§. 97. Anmerkung. Noch verdient hier die abgekürzte Multiplication und Division in Decimalbrüchen erklärt und durch Beispiele erläutert zu werden, da sie in mancherlei Fällen sehr zweckmäßig gebraucht wird.

I. Abgekürzte Multiplication.

Gesetzt, man sollte das Product aus 0,842365 × 0,249371 bilden, so wäre die gewöhnliche Rechnung diese:

0,842365 0,249371	Factoren.
842365 5896555 2527095 7581285 3369460 1684730	Theilfacta.
0,210061402415	Product.

Allein man kann die Multiplication auch mit der größten Ziffer des Multiplicators (hier mit 2) anfangen, und nach und nach mit den niedrigern Ziffern fortfahren, nach folgendem Muster:

0,842365		M
0,249371		m
1684730		A
336946	0	B
75812	85	C
2527	095	D
589	6555	E
8	42365	F
0,2100614	02415	P

Wollte man nun das Product nicht auf 12 Stellen finden, (was in den meisten Fällen wegen Kleinheit der letztern Bruchstellen nicht nöthig ist) so brauchte man jene Ziffer, welche zur Rechten des gezogenen Verticalstrichs stehen, weder zu berechnen, noch zu schreiben. Dieses geschieht dadurch, daß man (Siehe das untere Beispiel) zuerst alle Ziffer von **M** mit der 2 in **m** multiplicirt, woraus **A** entsteht. Dann multiplicire man mit der 4 in

m die 6 und alle höhere Stellen in M; mit der 9 in m die 3 und alles Höhere in M; mit der 3 in m die 2 und alles Höhere in M; mit der 7 in m die 4 und alles Uebrige in M; mit der 1 in m die 8 in M, und setze diese Producte in die Reihen A, B, C, D, E, F, so entsteht aus ihrer Summe das Product P, welches höchstens in seinen beiden niedrigsten Ziffern unrichtig ist.

0,842365	M	Factoren.
0,249371	m	
1,684730	A	abgekürzte Theilfacta.
336944	B	
75807	C	
2526	D	
588	E	
8	F	
0,2100603	P	abgekürztes Product.

Hier können die beiden letzten Ziffer (03), als unrichtige Stellen, weggelassen werden.

II. Abgekürzte Division.

Die abgekürzte Division in Decimalbrüchen besteht darin, daß man zuerst mit dem ganzen Divisor in den ganzen Dividenden, sodann mit dem, um seine niedrigste Ziffer verminderten Divisor in den zweiten Theil des Dividenden; hierauf mit dem abermals um seine niedrigste Stelle verminderten Divisor in den dritten Theil des Dividenden dividirt, und damit bis zu Ende fortfährt. Zum Beispiele diene das vorige Multiplications-Exempel,

Divisor. Dividend. Quotient.

0,249371 | 0,2100603 | 0,842365
1994968

0,24937 | 105635
99748

0,2493 | 5887
4986

0,249 | 901
747

0,24 | 154
144

0,2 | 10
10

00

Allmählig verminderte Divisoren.

§. 98. **Anmerkung.** Die großen Vortheile, welche diese Decimalbrüche in den Rechnungen gewähren, werden in der **fünften Abtheilung** (von den gemeinen Brüchen), recht einleuchtend werden. Besonders wird sich dieses bei der **Addition** von fünf, sechs, sieben, acht u. s. f. gemeinen Brüchen zeigen, welche, nach der gewöhnlichen Rechnung, erst mit vielem Zeitaufwande unter einerlei Benennung gebracht werden müssen, was bei den Decimalbrüchen durchaus hinwegfällt. Aehnliche Erleichterungen treten auch bei der Subtraction ein.

Vierte Abtheilung.

Von den benannten Zahlen.

---

§. 99. Erklärung. Der Werth einer Zahl hängt nicht allein von der Menge ihrer Einheiten, sondern zugleich auch von der Größe oder von dem Werthe dieser Einheiten selbst ab (§. 14). Die Größe der Einheit aber ist willkührlich (§. 13.), und die im gemeinen Leben vorkommenden Geschäfte machen es nöthig, Einheiten von verschiedenem Werthe anzunehmen. Solche Zahlen nun, bei welchen nicht nur die Menge, sondern auch noch die durch willkührliche Annahme der Menschen festgesetzte Größe der Einheiten angegeben ist, heißen benannte Zahlen. Z. B. 3 Gulden; 18 Pfunde; 10 Meilen u. s. w., wobei man unter dem Worte Gulden einen bestimmten Geldes-Werth, unter Pfund ein bestimmtes Gewicht, und unter der Meile ein bestimmtes Längenmaß sich vorzustellen hat.

§. 100. Anmerkung. Es ist klar, daß die Rechnung in benannten Zahlen im Wesentlichen keine neue Regeln erfordert. Das Einzige, was hierbei zu bemerken ist, besteht darin, daß man weiß, wie viele Einheiten einer niedrigern Werthart auf eine Einheit der zunächst höhern gehen. Die Zahl, welche dieses angibt, wird die Reductionszahl genannt. So ist z. B. bei Gulden und Kreuzern die Reductionszahl = 60; bei Pfunden und Lothen ist sie = 32 u. s. w. Mit diesen Zahlen muß man sich aus besonders hierzu

eingerichteten Schriften bekannt machen. Die folgenden Tabellen, welche lediglich deshalb dastehen, um die Anwendungen in den vier Rechnungsarten zu verstehen, zeigen ungefähr die in den Fällen des gemeinen Lebens am meisten gebräuchlichen benannten Zahlen, welche Anfänger, um sich die nöthige Fertigkeit zu erwerben, auswendig lernen müssen.

§. 101. I. Tabelle
über einige im gemeinen Leben am Häufigsten vorkommende benannte Zahlen.

I. Gemeines Gewicht.

Ein Centner hat = = = =	100 Pfunde.
Ein Pfund = = = = =	32 Lothe.
Ein Loth = = = = =	4 Quentchen.

II. Deutsches Apothekergewicht.

Ein Pfund (℔) hat = = =	12 Unzen.
Eine Unze (℥) = = = =	8 Drachmen.
oder	24 Lothe.
Eine Drachma (ʒ) = = = =	3 Scrupel.
Ein Scrupel (℈) = = = =	20 Gran.

III. Geldsorten.

Ein N. Louisd'or (Carolin) enthält =	11 Gulden.
Ein Gulden = = = = =	60 Kreuzer.
Ein Kreuzer = = = = =	4 Pfennige.

IV. Zeiteintheilung.

Ein Jahr besteht aus = = =	12 Monaten.
Ein Monat = 28 oder 29 oder 30 oder	31 Tagen.
Ein Tag = = = = =	24 Stunden.
Eine Stunde = = = = =	60 Minuten.
Eine Minute = = = = =	60 Secunden.

V. Gemeines Längenmaß.

Eine deutsche Meile = = = =	24000 Rh. Sch.
Ein Rh. Schuh = = = =	12 Zolle.
Ein Zoll = = = = =	12 Linien.
Eine Linie = = = = =	12 Puncte.

VI. Papiermaß.

Ein Ballen hat = = = =	10 Rieß.
Ein Rieß = = = = =	20 Buch.
Ein Buch (Schreibpapier) = =	24 Bogen.
Ein Buch (Druckpapier) = =	25 Bogen.

II. Tabelle

über einige im Königreiche Bayern vorkommende benannte Zahlen.

I. Längenmaße.

Ein bayerischer Fuß hat = =	129,28 paris. Linien.
Eine bayerische Elle = = =	369,27 = =
Eine geometrische Ruthe = =	10 bayer. Fuß.
Eine bayerische Klafter = =	6 = =
Eine deutsche Meile hat = =	25380,076 bayer. F.
Eine bayer. Chausseestunde hat =	12703 bayer. Fuß.

II. Flächenmaße.

*) Unter einem Quadratfuß versteht man ein Quadrat, welches einen Fuß lang und einen Fuß breit ist.

Ein bayerischer Quadrat-Fuß hat 166,244055 paris. Q.-Zolle.
Eine bayerische Quadrat-Klafter hat 36 bayerische Q.-Fuß.
Ein bayerisches Tagwerk hat 40000 bayerische Quadrat-Fuß.

*) Das Tagwerk kann demnach als ein Quadrat von 200 bayer. Fuß in der Länge und ebenso von 200 Fuß in der Breite angesehen werden.

III. Körpermaße.

*) Ein Cubikfuß ist ein Würfel, welcher einen Fuß lang, einen Fuß breit und einen Fuß hoch ist.

Ein bayer. Cubik-Fuß hat 1253,307626 franz. Cubik-Zoll.
Eine bayer. Cubik-Klafter (Holz) hat 126 bayer. Cub.-Fuß.

IV. Getränkmaß.

Eine bayer. Maßkanne hat 43 bayer. Decim. Cubik=Zoll oder 53,8923 paris. Duodec. Cub.=Zoll.

Ein bayer. Visireimer hat = = 64 Maßkannen.
Ein bayer. Schenkeimer = = 60 = =
Ein bayer. Ohm = = = 2 Eimer.
Ein bayer. Eimer = = = 4 Viertel.
Ein bayer. Viertel = = = 15 Maß.
Ein bayer. Maß = = = 2 Seidel.
Ein bayer. Seidel = = = 2 Quart.
Ein bayer. Quart = = = 2 Achtel.

V. Getraide= und Mehlmaße.

*) Der altbayerische Metzen, als Einheit des Getraidemaßes, hat $34\frac{2}{3}$ bayerische Maßkannen.

Ein Scheffel hält = = = 6 Metzen.
Ein Metzen = = = = 2 halbe Metzen.
Ein halber Metzen = = = 2 Viertel.
Ein Viertel = = = = 2 Achtel.
Ein Achtel = = = = = 2 Sechzehntel.
Ein Sechzehntel = = = = 2 Maßl.

VI. Gewichte.

Ein bayerisches Pfund, als Kramgewicht, hält 2 Mark 25864 Richtpfennige kölnisch, oder auch 156936 kölnische Richtpfennige, oder 11647,638 holländische Aß, oder 560 französische Grammes.

Ein neubayerisches Apotheker=Pfund hält an kölnischen Richtpfennigen 100887,12; an holländ. Aß 7487,7409; an französischen Grammen 360.

Vierzehn Apotheker=Pfunde betragen neun gewöhnliche Handels=Pfunde, und

Sieben Apotheker-Lothe betragen sechs gewöhnliche Krämer-Lothe.

Vorstehende Verhältnißzahlen sind aus der sehr zu empfehlenden Schrift: J. P. Weigl, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Sulzbach, 1812, entlehnt worden.

§. 102. Aufgabe. Benannte Zahlen zu addiren.

I. Man setze die gegebenen einzelnen Zahlen so, daß jene, welche von der nämlichen Art sind, d. h. welche mit einerlei Namen benennt werden, in einer lothrechten Reihe unter einander und zwar so stehen, daß die gleichnamigen Ordnungen in ihnen auch untereinander kommen, und ziehe einen Strich (§. 27. I.). (Siehe die Beispiele.)

II. Man bringe alle Einheiten der niedrigsten Art in eine Summe, und untersuche durch die Division mit der Reductionszahl (d. h. mit einer Zahl, welche nach §. 100. anzeigt, wie viele Einheiten dieser niedrigsten Gattung auf eine der nächsthöhern gehen) in diese Summe, wie oft dieser Divisor hierin enthalten ist. Den Rest aus dieser Division, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle, setze man in die Stelle der Einheiten der niedrigsten Ordnung.

III. Den Quotienten aus dieser Division (II.) behalte man im Sinne, und zähle ihn mit zu den gegebenen Zahlen der nächsthöhern Gattung. Die hieraus entspringende Summe theile man

IV. Wiederum mit einer Zahl, welche bestimmt, wie viele Einheiten dieser niedrigen Ordnung auf eine Einheit der unmittelbar höhern gehen, schreibe den Rest aus dieser Division, oder, wenn keiner übrig bleibt, wieder eine Nulle, in diese Stelle, zähle den erhaltenen Quotienten (nach III.) aufs Neue zu den Zahlen der nächsthöhern Ordnung, und fahre nach diesen Regeln so lange fort,

bis man zur höchsten Stelle gekommen ist, wo dann die sich ergebende Summe, ohne fernere Reduction, hingeschrieben werden muß.

Beweis. Die Richtigkeit dieses ganzen Verfahrens beruhet offenbar theils auf den §§. 99—101., theils auf der Natur der benannten Zahlen, und folgende Beispiele werden zur größern Erläuterung dienen:

Beispiele.

I.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
178	85	18	3
4793	37	25	2
508	23	12	3
89	79	28	1
5570	26	21	1

II.

Jahre.	Monate.	Tage.	Stunden.	Min.	Sec.
137	10	28	18	37	58
85	9	18	23	45	38
206	11	0	16	36	25
430	7	18	11	0	1

III.

Ohm.	Eimer.	Viertel.	Maß.	Seidel.
15	1	3	12	1
9	0	2	8	0
14	1	3	13	1
12	1	0	10	1
52	**1**	**2**	**14**	**1**

Zur Erläuterung des ersten Beispiels Folgendes: Wenn man alle gegebenen Quentchen summirt, so bekommt man eine Summe von 9. Nun besteht aber nach §. 101. ein Loth aus 4 Quentchen. Folglich müssen diese 9 durch 4 dividirt werden, um die darin enthaltenen Lothe zu finden. Der Quotient gibt 2 Lothe, und es bleibt 1 Quentchen zum Reste, welcher in die Reihe der Quentchen geschrieben wird. Die 2 Lothe hingegen werden zu den folgenden Lothen gezählt, mit welchen sie eine Summe von 85 Lothen bilden. Nun sind aber wieder (nach §. 101.) in einem Pfunde 32 Lothe enthalten, folglich müssen diese 85 Loth durch 32 dividirt werden. Der Quotient gibt 2 Pfunde, welche man zur folgenden Reihe der Pfunde zählt, und zum Reste 21 Lothe, welche unter den Lothen stehen bleiben u. s. w.

§. 103. Aufgabe. Mehrere gegebene benannte Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. I. Man schreibe die gegebenen Zahlen so, daß die größere oben, die kleinere unten steht und daß wieder die gleichnamigen Einheiten lothrecht untereinander kommen (wie in §. 100.); und ziehe einen Strich. (Siehe die Beispiele.)

II. Sind nun alle einzelne Zahlen in der abzuziehenden Zahl kleiner, als alle gleichnamige der andern, wovon der Abzug geschehen soll, so nehme man jede derselben von der über ihr stehenden hinweg, und setze den jedesmaligen Rest unter den Strich. (Siehe Beispiel I.)

III. Tritt hingegen der Fall ein, daß eine größere Zahl von einer kleinern weggenommen werden soll, so entlehne man eine Einheit bei der nächsthöhern Gattung, verwandle diese (nach §. 101.) in Einheiten der nächstkleinern Ordnung, setze die von dieser Ordnung vorhandenen

Einheiten dazu, ziehe nun die Zahl des Subtrahenden davon ab, und schreibe den gefundenen Rest in seine gebührende Stelle.

IV. Bei den folgenden Stellen verfahre man gerade ebenso, und bemerke nur, daß jene Zahl, bei welcher eins gelehnt worden ist, eben hierdurch auch um eine Einheit verringert wurde.

Beweis. Auch diese Vorschrift gründet sich theils auf die Regeln der Subtraction der unbenannten Zahlen, theils auf den willkührlichen Werth, welchen man benannten Zahlen (nach §. 101.) beilegt. Folgende Beispiele werden dieses um so mehr aufklären.

Beispiele.

I.

Gulden.	Kreuzer.	Pfennige.
7893	23	2 Gr. Zahl.
965	18	1 Kl. Zahl.
6928	5	1 Rest.

II.

Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.
1884	85	18	1
958	94	23	3
925	90	26	2

Erklärung über II.

Von 1 Quentchen können keine 3 weggenommen werden. Daher nimmt man ein Loth herüber, welches mit diesem 1 Quentchen nunmehr 5 Quentchen ausmacht. Hiervon nun die 3 abgezogen, bleiben 2 Quentchen übrig. Nun sollen 23 Lothe von 17 Lothen subtrahirt werden,

welches wieder, an und für sich, unmöglich ist. Man nimmt daher 1 Pfund, welches 32 Lothe beträgt, herüber, so machen diese 32 Lothe, nebst den vorhandenen 17 eine Summe von 49, wovon nun die 23 Lothe abgezogen werden können u. s. w.

§. 104. Anmerkung I. Die Probe über die Addition und Subtraction kann hier eben so, wie bei den unbenannten Zahlen (§. 51.) gemacht werden, welches eine Uebung für die Anfänger ist, um sich eine Fertigkeit in diesen Rechnungen zu verschaffen.

II. Als Uebungs- und Proberechnung könnte man in diesen Additions- und Subtractions-Beispielen alle höhern Wertharten in die niedrigsten verwandeln, mit diesen die Addition oder Subtraction vornehmen und die Resultate wieder auf die höhern Werthe reduciren.

§. 105. Anmerkung. Um von der Addition und Subtraction in benannten Zahlen einige andere, öfters im bürgerlichen Leben vorkommende nützliche Anwendungen zu zeigen, sollen folgende Beispiele betrachtet werden.

I. Additionsbeispiele.

1) Gustav Adolph (König von Schweden) wurde am 9ten December des Jahres 1594 geboren, und erreichte ein Alter von 37 Jahren 10 Monaten und 28 Tagen. An welchem Datum ist er gestorben?

Offenbar müssen hier die zwei gegebenen Zeiten addirt werden. Um das Geburtsjahr gehörig auszudrücken, bemerke man, daß wir schon am nächsten Tage nach dem vollendeten 1593er Jahr, im Jahre 1594 leben; ferner, daß die Zeit des 9ten Decembers nichts anders ist, als 8 abgelaufene Tage nach dem Monate November, welcher der 11te im Jahre ist. Daher wird die Rechnung folgende:

Jahre.	Monate.	Tage.	
1593	11	8	Geburtszeit.
37	10	28	Alter.
1630	21	36	Summe.

Um diese Summe auf den gehörigen Datum des Kalenders zurückzuführen, bedenke man, daß die erhaltenen 21 Monate wiederum 1 Jahr und 9 Monate betragen. Gustav Adolph ist demnach im Jahre 1631 nach 9 Monaten und 36 Tagen gestorben. Nun ist aber der 9te Monat der September, und der October hat 31 Tage. Folglich mußte nach 9 Monaten und 31 + 5 Tagen der 5te November verflossen gewesen seyn, und Gustav Adolph ist am 6ten November des Jahres 1632 gestorben, weil die 10 Monate und 5 Tage **nach** dem Jahre 1631 und folglich in das Jahr 1632 fallen.

2) Es hat Jemand am 11. Januar des Jahres 1782 Geld geliehen, welches nach Ablauf von 3 Jahren 4 Monaten und 24 Tagen zurückgezahlt worden ist. Auf welchen Datum fiel die Rückzahlung? Die Rechnung ist hier diese:

Jahre.	Monate.	Tage.
1781	0	10
3	4	24
1784	4	34

Die Zahlung wurde also nach dem Jahre 1784, nach dem 4ten Monate (April) und nach 34 Tagen; folglich, da der Mai 31 Tage hat, nach dem 3ten Junius; und demnach am 4ten Junius des Jahrs 1785 geleistet.

II. Subtractionsbeispiele.

1) Es ist Jemand im Jahre 1770 auf den 11ten März des Abends um 8 Uhr gestorben, und wurde geboren im Jahr 1701 den 8ten Februar Morgens um 7 Uhr. Man sucht das Alter des Verstorbenen.

Aus der Natur der Sache ergibt es sich sogleich, daß man von dem Datum des Absterbens jenen der Geburt abziehen müsse, um das Alter zu finden. Dieses bildet folgende Rechnung:

Jahre.	Monate.	Tage.	Stunden.
1769	2	10	20
1700	1	7	7
69	1	3	13

Der Verstorbene ist daher 69 Jahre, 1 Monat, 3 Tag und 13 Stunden alt gewesen.

2) Es hat Jemand an dem 11ten Januar des Jahres 1782 eine Summe Geldes geliehen, und dieselbe am 4ten Junius 1785 wieder zurückgezahlt. Wie lange hatte er dieses Geld benützt?

Offenbar muß hier vom spätern Datum der frühere abgezogen werden. Dieses gibt

Jahre.	Monate.	Tage.
1784	5	3
1781	0	10
3	4	24

Hier sollten 10 Tage von 3 Tagen abgezogen werden, was nicht möglich ist. Daher müssen vom 5ten Monate, d. h. vom Mai, der 31 Tage hat, diese 31 Tage geborgt werden u. s. w.

Die geliehene Geldsumme wurde daher 3 Jahre, 4 Monate und 24 Tage vom Empfänger benützt.

Da die Addition und Subtraction sich wechselseitig zu Proben dienen, so können aus vorstehenden vier Beispielen noch vier andere Fragen gebildet und aufgelöset werden, welche Uebung sehr zu empfehlen ist.

§. 106. Aufgabe. Benannte Zahlen von verschiedenen Wertharten mit einer gegebenen unbenannten Zahl zu multipliciren.

Auflösung. I. Man multiplicire die niedrigste der gegebenen benannten Zahlen mit dem Multiplicator, untersuche durch die Division (nach §. 102., II.) wie oft dieses Product die Einheiten der nächsthöhern Ordnung enthält und schreibe den Rest aus dieser Division, oder, wenn keiner bleibt, eine Nulle, in die gehörige Stelle unter einen gezogenen Strich. (Siehe die Beispiele.)

II. Man gehe zur zweiten der gegebenen Zahlen, mache das Product aus ihr in den Multiplicator, addire hierzu den (in I.) gefundenen Quotienten, dividire diese Summe wieder mit der Reductionszahl (nach §. 72., II.) um zu finden, wie viele Einheiten der nächsthöhern Stelle darin enthalten sind, schreibe den allenfallsigen Rest in seine gehörige Stelle und behalte den Quotienten zur folgenden Multiplication im Sinne.

III. Man verfahre auf gleiche Art (nach I. und II.) mit jeder folgenden Stelle der gegebenen Zahl, bis man zur höchsten Stelle kommt, wo das Product ohne einige Veränderung hingeschrieben wird.

Beweis. Die Richtigkeit der gegebenen Auflösung beruht theils auf dem Satze: was mit allen Ordnungen d. h. mit allen Theilen einer Zahl geschieht, geschieht auch mit der Zahl selbst; theils aber darauf, daß nur Einheiten von einerlei Art beisammen stehen können.

Beispiele.

I. Gulden.	Kreuzer.	Pfennige.
3785	34	3 Multiplicand.
		18 Multiplicator.
68140	25	2 Product.

Erläuterung. 18mal 3 Pfennige geben 54 Pfennige, oder, durch die Division mit 4, 13 Kreuzer und 2 Pfennige zum Reste, welche in die Stelle der Pfennige geschrieben werden. Nun sage man: 18mal 34 Kreuzer sind 612 Kreuzer, hierzu die aus der vorigen Division entsprungenen 13 Kreuzer addirt, gibt 625 Kreuzer, oder, indem man durch 60 dividirt, 10 Gulden und 25 Kreuzer, welche letztere als Rest in der Stelle der Kreuzer bleiben. Endlich sind 18mal 3785 Gulden soviel als 68130 Gulden, wozu die 10 Gulden addirt, eine Summe von 68140 Gulden geben, und wodurch das verlangte Product gebildet ist.

II.	Centner.	Pfunde.	Lothe.	Quentchen.	
	783	56	18	2	Factoren.
				43	
	33693	32	27	2	Product.

III.	Scheffel.	Metzen.	Achtel.	Maßl.	
	312	5	4	3	Factoren.
				15	
	4693	5	7	1	

§. 107. Anmerkung. Diese Aufgaben können auch so aufgelöset werden, daß man alle Einheiten der höheren Gattungen auf Einheiten der niedrigsten bringt, diese ganze Summe nun mit dem gegebenen Multiplicator multiplicirt und das Product durch die Division wieder in die höheren Wertharten verwandelt. Man denke sich das erste Beispiel (im vor. §.) und sage, die 3785 Gulden sind so viel, als 3785 $\times$ 60 Kreuzer, oder sie geben 227100 Kreuzer, und diese sind wieder soviel als 227100 $\times$ 4 $=$ 908400 Pfennige. Ferner sind die gegebenen 34 Kreuzer $= 34 \times 4 =$ 136 Pfennige. Daher ist der ganze Multiplicand in Pfennigen $=$ 908400 $+$ 136 $+$ 3 Pfennige $=$ 908539 Pfennige. Diese nunmehr durch 18 multiplicirt, gibt ein Product von 16353702 Pfennigen, welches, durch 4 dividirt, zum Quotienten 4088425 Kreuzer hervorbringt, und zum Reste 2 Pfennige zurückläßt. Werden nun diese 4088425 Kreuzer, durch die Division mit 60, zu Gulden ge-

macht, so erhält man 68140 Gulden und 25 Kreuzer. Folglich ist das ganze Product 68140 Gulden, 25 Kreuzer, 2 Pfennige, wie oben im Beispiele I. gefunden worden war. Solche Uebungen sind den Anfängern sehr zu empfehlen.

§. 108. Anmerkung. Aus dem oben (§. 99.) bestimmten Begriffe der benannten Zahlen folgt, daß man zwei oder mehrere benannte Zahlen nicht mit einander multipliciren kann. Denn wenn man z. B. 8 Gulden mit 6 Gulden multipliciren sollte, so hieße es soviel, als jene 8 Gulden sollen 6 Gulden mal genommen werden, was durchaus keinen verständigen Sinn hat. Demnach sind Producte aus benannten Zahlen in benannte Zahlen als unmögliche Größen zu betrachten. Wenn daher der eine Factor eine benannte, der andere eine reine Zahl ist, so betrachte man jene immer als Multiplicanden und diese als den Multiplicator; aber nicht umgekehrt.

§. 109. Aufgabe. Benannte Zahlen durch gegebene unbenannte zu dividiren.

Auflösung. I. Man dividire mit dem gegebenen Divisor in die höchste Werthart der gegebenen benannten Zahlen, und setze den Quotienten neben den gezogenen Strich, wie im ersten Beispiele. Man fängt deshalb mit der höchsten Werthart an, weil die bei ihr etwa bleibenden Reste sehr bequem in die zunächstniedrigere verwandelt werden können; nicht aber umgekehrt.

II. Den etwaigen Rest aus dieser Division verwandle man, durch die Multiplication mit der Reductionszahl (§. 102. II.) in die Einheiten der unmittelbar folgenden niedrigern Werthart, setze die in derselben vorhandenen gleichartigen Einheiten dazu, und dividire diese Summe von Neuem durch den gegebenen Divisor, schreibe den Quotienten nach I., verwandle den Rest wie in II., addire die folgende nächst kleinere benannte Zahl dazu, und fahre

III. Auf eben diese Art mit allen folgenden Stellen bis zur niedrigsten fort, wobei denn der allenfallsige Rest aus der letzten Division anzeigt, daß derselbe ebenfalls durch den Divisor noch einmal getheilt werden sollte.

Beweis. Die gegebene Vorschrift rechtfertigt sich theils durch die gewöhnlichen Regeln der Division, theils aber durch den willkührlichen Werth der benannten Zahlen.

Beispiel. I. Es sollen 7843 Gulden, 54 Kreuzer und 3 Pfennige unter 9 Personen gleich ausgetheilt werden. Wieviel bekommt einer? Die Rechnung ist folgende:

Divisor. Gulden. Kr. Pf.
9 | 7843 54 3 Dividend.
9 | 7843 | 871 Quotient aus den Gulden.
72..
64.
63.
13
9
4 Rest von den Guld.
60 Reductionszahl multiplicirt.
240 in Kr. verwandelt.
54 Die gegebenen Kr. addirt.
9 | 294 | 32 Quot. aus den Kr.
27.
24
18
6 Rest von den Kr.
4 Reductionszahl multiplicirt.
24 in Pf. verwandelt.
3 die gegebenen Pf. addirt.
9 | 27 | 3 Quot. aus den Pf.
27
0

Der ganze Quotient ist daher 871 Gulden, 32 Kr. und 3 Pf., d. h. jeder der 9 Menschen bekommt 871 Gulden, 32 Kreuzer und 3 Pfennige von den unter sie gleich zu vertheilenden 7843 Gulden.

II. Man soll 4389 Centner, 85 Pfunde, 18 Lothe und 2 Quentchen unter 16 Menschen gleich austheilen. Was ist der Antheil eines Jeden? Die Rechnung gibt Folgendes:

	Ctr.	Pf.	Lothe.	Quent.
16 |	4389	85	18	2

16 | 4389 | 274 Quotient aus den Centnern.
32..
118.
112.
69
64
5 Rest von den Centn. } multiplicirt.
100 Reductionszahl }
500 in Pf. verwandelt.
85 die gegebenen Pf. addirt.
16 | 585 | 36 Quotient aus den Pfunden.
48.
105
96
9 Rest von den Pfd. } multiplicirt.
32 Reductionszahl }
288 in Lothe verwandelt.
18 die gegebenen Lothe addirt.
16 | 306 | 19 Quotient aus den Lothen.
16.
146
144
2 Rest von den Lothen } multiplicirt.
4 Reductionszahl }
8 in Quentchen verwandelt.
2 die vorhandenen Quentchen addirt.
16 | 10 | Quotient weniger als 1 Quentchen, weil

hier 10 Quentchen unter 16 Menschen gleich zu vertheilen sind. Wäre nur 1 Quentchen unter 16 gleichmäßig zu vertheilen, so erhielte jeder ein Sechzehntel (d. h. den 16ten Theil) dieses Quentchens. Da aber 10 Quentchen vertheilt werden sollen, so bekommt einer von ihnen offenbar 10mal soviel, d. h. jeder erhält zehn Sechzehntel des Quentchens. Die zunächst folgende Abtheilung wird die Bedeutung solcher Divisionen näher betrachten.

§. 110. Zusatz. I. In der vorigen Aufgabe wurde eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt, und der Quotient mußte deshalb eine benannte Zahl geben, weil jeder Theil einer benannten Zahl gleichartig mit ihr selbst, d. h. wiederum benannt seyn muß. Auch stimmt damit die bekannte Probe der Division überein, nach welcher der unbenannte Divisor, mit dem benannten Quotienten multiplicirt, einen benannten Dividenden hervorbringt. Aber kann denn auch sowohl der Divisor als der Dividend eine benannte Zahl seyn? Allerdings, und nun ist, wenn nur Divisor und Dividend unter sich gleichartige Größen sind, der Quotient eine reine Zahl. So sind z. B. 5 Gulden in 30 Gulden 6mal, 3 Pfunde in 24 Pfunden 8mal enthalten u. s. w. Auch hier hat die Divisionsprobe Statt. — Wenn aber der Divisor eine benannte, der Dividend eine unbenannte Zahl ist, wenn z. B. die reine Zahl 48 durch 6 Pfunde dividirt werden sollte, so wird der Quotient, der nun (zufolge der Probe) weder rein noch benannt seyn kann, durchaus unmöglich. Auch geht dieses hier schon daraus hervor, daß die 6 Pfunde von der reinen Zahl 48 durchaus nicht weggenommen werden können.

II. Aber wie oft sind 4 Lothe in 12 Pfunden enthalten? Da 1 Pf. = 32 Loth, so sind 12 Pf. = 12 × 32 = 384 Loth. Man dividire daher mit 4 in 384, welches 96

zum Quotienten gibt. Folglich sind 12 Pf. gerade 96mal größer als 4 Lothe. — Da hier die Zahl 12, als Menge der Pfunde, gerade 3mal größer ist, als die Zahl 4, welche die Menge der Lothe angibt, so dürfte man diesen Quotienten 3 nur mit der Reductionszahl 32 multipliciren, um die zuvor gefundene Zahl 96 zu erhalten. — Nach diesem Muster lassen sich viele Uebungsfragen bilden.

§. 111. Anmerkung. Auch die Divisionsaufgaben können auf eine andere Art (nach §. 107.) aufgelöset werden, indem man zuerst alle gegebene benannte Zahlen auf die Einheiten der niedrigsten Werthart bringt, nun die Division mit dem gegebenen Divisor verrichtet, und endlich den sich hieraus ergebenden Quotienten (nach §. 107.) wieder zurück auf die höheren Wertharten bringt. Zum Beispiele diene das erste Exempel in §. 109. Die dortigen 7843 Gulden in Kreuzer verwandelt, gibt 7843 × 60 = 470580 Kreuzer, oder 470580 × 4 = 1882320 Pfennige. Die gegebenen 54 Kreuzer geben 54 × 4 = 216 Pfennige. Folglich ist die dortige ganze benannte Zahl so viel als 1882320 + 216 + 3 = 1882539 Pfennige. Dieses durch 9 dividirt, gibt (nach §. 60.) Folgendes:

9 | 1882539 | 209171 Pfennige.

Dieser Quotient, mit 4 dividirt, gibt die Kreuzer, welche darin enthalten sind, oder:

4 | 209171 | 52292 Kreuzer, nebst einem Reste von 3 Pf.

Dieser letztere Quotient, nun wieder mit 60 dividirt, gibt Folgendes für die Gulden:

```
60 | 52292 | 871 Gulden.
      480..
      -----
       429.
       420.
       ----
         92
         60
         --
         32 Rest von Kreuzern.
```

Daher ist der 9te Theil der gegebenen Zahl so viel als 871 Gulden, 32 Kreuzer und 3 Pfennige, wie oben (§. 109. I.).

§. 112. Anmerkung. Auch bei der Multiplication und Division in benannten Zahlen findet der §. 64. seine Anwendung,

indem jede dieser beiden Rechnungsarten der andern zur Probe dienen kann. Es ist daher Anfängern sehr nützlich, sich in dergleichen **Proberechnungen** mehrfach zu üben, um hierdurch eine desto größere Fertigkeit zu erlangen. Ueberhaupt müssen diese vier Rechnungsarten in benannten Zahlen an vielen Beispielen durchgeführt werden, wozu es dem Lehrer nicht am gehörigen Stoffe fehlen kann, wenn er solche Fälle wählt, welche häufig im gemeinen Leben vorkommen.

Fünfte Abtheilung.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 113. Lehrsatz. Die Einheit (§. 7.) durch eine gegebene Zahl dividiren, heißt, die 1 in so viele gleiche Theile, als der Divisor es anzeigt, eintheilen und Einen dieser Theile nehmen.

Beweis. Aus dem Begriffe der Division (§. 21. und §. 36. VII.) folgt, daß der Dividend in so viele gleiche Theile getheilt werden soll, als wieviele Einheiten der Divisor enthält. Ist daher der Dividend die Einheit und der Divisor eine größere Zahl, so wird die Einheit selbst in soviele gleiche Theile getheilt, als wieviele der Divisor enthält, und Ein solcher Theil ist der Quotient. Z. B. 1 durch 7 dividiren, heißt, diese 1 in 7 gleiche Theile eintheilen, und der hieraus entstehende Quotient ist offenbar soviel, als der siebente (gleiche) Theil von 1. Ebenso ist 1 : 9 soviel als Ein Neuntel; 1 : 13 soviel als Ein Dreizehntel; 1 : 124 soviel als Ein Einhundert vier und zwanzigstel u. s. w.

§. 114. Lehrsatz. Eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren, heißt soviel, als die Einheit, woraus beide Zah-

len bestehen, in so viele gleiche Theile theilen, als die größere es anzeigt, und von diesen Theilen so viele nehmen, als die kleinere enthält.

Beweis. Wenn man eine Einheit des Dividenden durch den gegebenen Divisor dividirt, so heißt es so viel, als: dieses Eins nach der Menge der Einheiten des Divisors eintheilen, und einen dieser Theile nehmen (§. 113.). Nun ist aber in dem gegenwärtigen Falle der Dividend so vielmal größer als 1, als wieviele Einheiten derselbe enthält. Folglich muß auch der Quotient auf eben diese Art vergrößert werden, d. h. er muß so viele von den nach dem Divisor gleich getheilten Theilen der Einheit enthalten, als aus wievielen der Dividend besteht. Z. B. die Zahl 5 durch 7 dividiren, heißt, die Einheit, woraus 5 besteht, in 7 gleiche Theile theilen, und 5 von solchen Theilen, d. h. fünfsiebente Theile (fünf Siebentel) nehmen. Denn offenbar ist $5 : 7 = 5 \times (1 : 7)$. Allein $1 : 7$ ist (nach §. 113.) so viel, als ein siebenter Theil, folglich muß $5 \times (1 : 7)$ so viel, als fünfmal dieser siebente Theil, oder so viel, als fünf Siebentel seyn. — Auf gleiche Art ist $9 : 11$ soviel, als Neun Eilftel; $13 : 36$ soviel, als dreizehn Sechsunddreißigstel u. s. w.

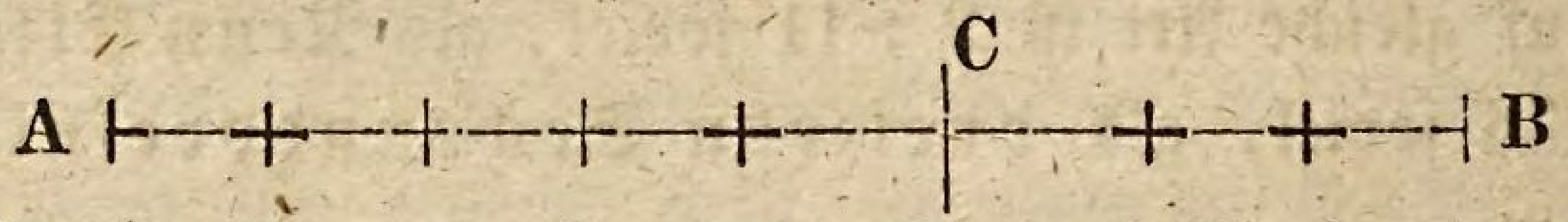
§. 115. Zusatz. I. Wenn Divisor und Dividend unter sich gleiche Zahlen sind, so wird der Quotient $= 1$; denn nun kann jener von diesem gerade einmal abgezogen werden (§. 21. und 34). Daher sind die Quotienten, welche in §. 113. und 114. entstehen, offenbar kleiner als 1, und enthalten somit bloße Theile der Einheit.

II. Die dortigen Quotienten sind jedoch wirkliche Zahlen (§. 7.), denn sie enthalten eine bestimmte Vielheit der in gleiche Theile eingetheilten Einheit.

§. 116. Erklärung. Zahlen, deren Einheiten Theile eines gleichgetheilten Ganzen sind, nennt man Brüche oder gebrochene Zahlen. Z. B. die fünf Siebentel in §. 114. sind nichts anders, als eine Zahl, welche die Einheit (ein Siebentel) fünfmal enthält. Ebenso ist von Neun Eilftel die Einheit Ein Eilftel; von dreizehn Sechsunddreißigstel ist sie Ein Sechsunddreißigstel u. s. f.

§. 117. Erklärung. I. Weil die Brüche eine bestimmte Menge der in gleiche Theile eingetheilten Einheit sind, so ist klar, daß die Größe eines Bruchs sowohl von der Art der Eintheilung des Ganzen, als auch von der Vielheit dieser Theile abhängt. Man muß daher bei jedem Bruche zweierlei wissen; erstlich, in wieviele gleiche Theile die Einheit ist getheilt worden, und dann, wieviele dieser Theile vorhanden sind. Jenes wird durch den Nenner und dieses durch den Zähler bestimmt. Bei dem Bruche: Fünf Siebentel (§. 116.) ist 7 der Nenner und 5 der Zähler.

II. Die Entstehung der Brüche läßt sich dadurch versinnlichen, daß man sich unter der geraden Linie AB



die Einheit oder das Ganze denkt, dasselbe in eine beliebige Menge gleicher Theile theilt; z. B. in acht, und von diesem eine willkührliche Menge nimmt. So stellt z. B. das Stück AC den Bruch fünf Achtel; das Stück BC aber den Bruch drei Achtel von AB vor. — Andere Eintheilungen des Ganzen AB geben andere Brüche.

III. Weil AC und BC die beiden Bruchstücke sind, welche aus dem bei C in zwei Theile (gleichsam) gebrochnen Ganzen entstehen, so erkennt man hieraus die Entstehung des Wortes: Bruch, oder gebrochene Zahl.

§. 118. Willkührlicher Satz. Weil sowohl der Zähler, als der Nenner (§. 117.) durch Zahlen ausgedrückt werden kann, so schreibt man einen Bruch dergestalt, daß die Ziffer des Zählers oberhalb, jene des Nenners unterhalb eines zwischen beiden gezogenen wagrechten Querstrichs zu stehen kommt. So zeigt der Bruch $\frac{3}{4}$ an, daß das Ganze (die Einheit) in 4 gleiche Theile eingetheilt ist, und daß 3 solcher Theile zu einer Zahl verbunden worden sind. Man drückt dieses durch: drei vierte Theile: oder kürzer durch: Dreiviertel aus. Die Brüche $\frac{7}{12}$, $\frac{10}{17}$, $\frac{2}{5}$ heißen daher: sieben Zwölftel, zehn Siebenzehntel, zwei Fünftel.

§. 119. Grundsätze. I. Alle Brüche, deren Zähler und Nenner einander gleich sind, haben einen Werth $= 1$. Denn man theilt in solchen Brüchen das Ganze in so viele gleiche Theile durch den Nenner (§. 117.), als wieviele durch den Zähler (§. 117.) wieder in eine Zahl zusammengefaßt werden. Folglich bekommt man das Ganze selbst wieder, da alle Theile zusammengenommen dem Ganzen gleich sind. Es ist z. B. $\frac{3}{3} = \frac{5}{5} = \frac{8}{8} = \frac{48}{48} = \frac{749}{749} = 1$.

II. Wenn der Zähler eines Bruches kleiner als dessen Nenner ist, so ist der ganze Bruch kleiner, als 1. Denn in diesem Falle sind weniger von jenen gleichen Theilen in dem Bruche vorhanden, als in wieviele das Ganze durch den Nenner ist eingetheilt worden. Die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{15}{29}$, $\frac{6}{13}$ sind folglich alle kleiner, als 1.

III. Wenn der Zähler eines Bruches größer, als sein Nenner ist, so ist der Bruch selbst größer, als 1. Denn er enthält mehr von jenen gleichen Theilen, als in wieviele das Ganze eingetheilt worden ist. Daher sind die Brüche $\frac{9}{5}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{148}{49}$ u. s. w. alle größer, als 1.

§. 120. Erklärung. Brüche, wie die in §. 119. I., III., welche entweder die Einheit selbst oder noch mehr

als die Einheit enthalten, heißen unächte Brüche oder Scheinbrüche. Andere hingegen, welche das Ganze nicht selbst, sondern nur einen Theil desselben enthalten, wie die Brüche in §. 119. II. werden ächte Brüche oder wahre Brüche (Bruchstücke des Ganzen) genannt.

§. 121. Zusatz. Nunmehr erklärt sich auch, was der Rest bedeutet, welcher bei den gewöhnlichen Divisionsaufgaben (§. 62.) öfters übrig bleibt. Er ist nämlich ein Theil des Dividenden, welcher, nach dem Sinne der Division (§. 36. VII.), noch durch den Divisor getheilt werden soll; aber nicht mehr in ganze Einheiten getheilt werden kann, weil er kleiner, als der Divisor ist. Daher tritt auch hier der Fall des §. 114. ein, und man muß diesen Rest als den Zähler eines Bruches ansehen, dessen Nenner der Divisor ist. So wird z. B. $239 : 8 = 29$ nebst einem Reste von 7, der noch durch 8 getheilt, d. h. in 8 gleiche Theile getheilt werden soll. Nun ist aber der 8te Theil von 1 soviel, als $\frac{1}{8}$; folglich der 8te Theil von 7 offenbar 7mal größer als $\frac{1}{8}$, oder soviel, als $\frac{7}{8}$. Daher wird der ganze Quotient 29 und $\frac{7}{8}$. Desgleichen gibt $7458 : 14 = 532 + \frac{10}{14}$ u. s. w.

§. 122. Grundsatz. I. Alle Brüche sind Quotienten aus dem Zähler als Dividend und aus dem Nenner als Divisor. So heißt z. B. der Bruch $\frac{7}{12}$ soviel, als das Ganze in 12 gleiche Theile theilen und 7 von ihnen nehmen. Eben so ist aber auch $7 : 12 = 7 \times (1 : 12)$. Allein $1 : 12 = \frac{1}{12}$. Folglich $7 \times (1 : 12) =$ 7mal ein Zwölftel oder $= \frac{7}{12}$.

II. Alle Quotienten sind Brüche, deren Zähler der Dividend und deren Nenner der Divisor ist. So heißt $7 : 12$ nichts anders, als die 7 soll in 12 gleiche Theile eingetheilt werden. Einer von diesen Theilen muß nothwendig 7mal größer seyn, als wenn nur 1 von diesen 7

in 12 gleiche Theile eingetheilt werden sollte. Allein 1 : 12 ist so viel, als ein Zwölftel. Daher ist der 7mal größere Quotient soviel, als sieben Zwölftel oder als der Bruch $\frac{7}{12}$, dessen Zähler 7, dessen Nenner 12 ist.

§. 123. Aufgabe. Zu finden, wieviele ganze Einheiten in einem uneigentlichen Bruche (§. 120.) enthalten sind.

Auflösung. Man dividire mit dem Nenner des gegebenen Bruchs in seinen Zähler. Der Quotient aus dieser Division (welcher entweder aus einer reinen ganzen Zahl, oder aus einer ganzen Zahl nebst einem ächten Bruche besteht) bestimmt die Menge der in dem Bruche enthaltenen ganzen (oder ganzen und gebrochnen) Einheiten.

Beweis. Alle Brüche, welche einerlei Zähler und Nenner haben, sind = 1 (§. 119.). Daher muß ein gegebener uneigentlicher Bruch diese 1 so oft enthalten, als wie oft dessen Nenner von dem Zähler abgezogen werden kann. Allein, wie oft dieser Abzug geschehen kann, findet man durch die Division des Nenners in den Zähler (§. 21). Daher ist die obige Auflösung richtig. Ausserdem geht die Wahrheit derselben auch daraus hervor, daß jeder Bruch einem Quotienten aus seinem Nenner in seinen Zähler gleich ist. (§. 122. I.)

Beispiele.

$\frac{15}{3} = 15 : 3 = 5$. Denn $\frac{3}{3} = 1$ (§. 119. I.); folglich ist $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{12}{3} = 4$ und $\frac{15}{3} = 5$. Ebenso $\frac{35}{5} = 35 : 5 = 7$; $\frac{49}{4} = 49 : 4 = 12\frac{1}{4}$; $\frac{217}{8} = 217 : 8 = 27\frac{1}{8}$ u. s. w.

§. 124. Aufgabe. Eine gegebene ganze Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln, dessen Nenner angegeben ist.

Auflösung. Man multiplicire die ganze Zahl mit dem gegebenen Nenner und setze unter dieses Product eben

diesen Nenner, so hat der so entstandene unächte Bruch die verlangte Eigenschaft.

Beweis. Die Multiplication und Division sind ihrer Natur nach (§. 18, §. 21. und §. 36. VI.) entgegengesetzte Rechnungsarten, welche, bei gleichen Zahlen, einander wechselseitig zernichten. Nun wird aber die gegebene ganze Zahl durch den Nenner des zu findenden Bruchs sowohl multiplicirt, als auch dividirt; folglich wird auch diese Zahl selbst an ihrer Größe gar nicht verändert und nur in (der zu findenden) Bruch-Form ausgedrückt.

Beispiele. I. Man soll 9 in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner 7 ist. Hier ist $9 = \frac{9 \times 7}{7} = \frac{63}{7}$.

II. Die Zahl 12 in einen Bruch umzuändern, der 9 zum Nenner hat, gibt $12 = \frac{12 \times 9}{9} = \frac{108}{9}$, u. s. w.

§. 125. Lehrsatz. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer gegebenen ganzen Zahl multiplicirt und unter dieses Product den unveränderten Nenner setzt, so entsteht ein neuer Bruch, welcher so vielmal größer, als der gegebene ist, als wie viele Einheiten jene ganze Zahl hatte, womit der Zähler multiplicirt worden ist.

Beweis. Der Zähler eines Bruches zeigt, seiner Natur nach, an, wie viele solcher gleichen Theile der Bruch enthält, als in welche das Ganze durch den Nenner ist eingetheilt worden (§. 117.). Er zeigt also die Menge jener Einheiten an, welche in dem gegebenen Bruche vorhanden sind. Je größer daher die Menge dieser Einheiten ist, desto größer ist auch der Bruch selbst. Nun wird aber durch die Multiplication des Zählers mit der ganzen Zahl der Zähler so vielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält (§. 30. II.); daher wird auch die Menge der in dem Bruche vorhandenen Einheiten, d. h. der Bruch selbst, so vielmal größer. Z. B. $\frac{5}{8}$ am Zähler mit 6 multiplicirt gibt $\frac{5 \times 6}{8} = \frac{30}{8}$; einen

Bruch, der 6mal größer, als der gegebene ist. — Denn gerade so, wie z. B. 30 Gulden sechsmal mehr als 5 Gulden sind, so sind auch $\frac{30}{8}$ sechsmal größer als $\frac{5}{8}$.

§. 126. Lehrsatz. Wenn man eines Bruches Nenner mit einer gegebenen ganzen Zahl multiplicirt, und dieses Product unter den unveränderten Zähler setzt, so wird der neue Bruch so vielmal kleiner, als der gegebene seyn, als wie viele Einheiten die ganze Zahl enthält, womit der Nenner multiplicirt worden ist.

Beweis. Der Nenner eines Bruches zeigt an, in wieviele gleiche Theile das Ganze ist eingetheilt worden (§. 117.). Jeder dieser Theile wird folglich um so kleiner werden, in je mehrere man das Ganze eingetheilt hat. Nun wird aber durch die Multiplication des Nenners mit der gegebenen ganzen Zahl der Nenner selbst so vielmal größer, als diese Zahl Einheiten enthält (§. 30. II.). Daher wird das Ganze jetzt in so vielmal mehr gleiche Theile getheilt, und einer dieser Theile muß daher eben so vielmal kleiner werden; folglich auch der ganze Bruch, indem die Menge seiner Einheiten die nämliche bleibt, wie zuvor. Z. B. $\frac{5}{8}$ am Nenner mit 6 multiplicirt, gibt $\frac{5}{8 \times 6} = \frac{5}{48}$, welcher Bruch 6mal kleiner, als der gegebene $\frac{5}{8}$ ist — Denn, da $\frac{1}{48}$ sechsmal kleiner als $\frac{1}{8}$ ist, so sind auch $\frac{5}{48}$ sechsmal kleiner als $\frac{5}{8}$.

§. 127. Zusatz. I. Wenn daher sowohl der Zähler, als der Nenner eines gegebenen Bruches mit einerlei Zahl multiplicirt wird, so bleibt der Werth dieses Bruches selbst ganz unverändert. Denn durch die Multiplication am Zähler wird derselbe so vielmal größer (§. 125.), als er nachher durch das Multipliciren am Nenner wiederum kleiner wird (§. 126.). Folglich heben sich diese beiden Veränderungen wechselseitig auf und der Bruch bleibt der nämliche. Z. B. $\frac{7}{9} = \frac{7 \times 4}{9 \times 4} = \frac{28}{36} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}$ u. s. w.

II. Wird des Bruches Zähler mit einer größern, und dessen Nenner mit einer kleinern Zahl multiplicirt, so wird der Werth des Bruches vermehrt. Z. B. $\frac{4}{5}$ am Zähler mit 9, am Nenner mit 7 multiplicirt, gibt $\frac{36}{35} = 1\frac{1}{35}$, welche gemischte Zahl größer als $\frac{4}{5}$ ist.

III. Ist dagegen der Factor des Zählers kleiner, als der Factor des Nenners, so wird der Werth des Bruches vermindert. Z. B. $\frac{3}{8}$ am Zähler mit 5 und am Nenner mit 7 multiplicirt, gibt $\frac{15}{56}$, einen Bruch, welcher kleiner als $\frac{3}{8}$ ist. Denn $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 7}{8 \times 7}$ (I.) $= \frac{21}{56}$.

IV. Wenn in diesen Fällen der kleinere Factor in dem größern ohne Rest enthalten ist, so wird der neue Bruch so vielmal größer oder kleiner, als der Quotient beider Factoren Einheiten enthält; je nachdem man den Zähler oder den Nenner des gegebenen Bruches mit der größeren Zahl multiplicirt hatte. So gibt z. B. $\frac{3}{5}$ am Zähler mit 12, und am Nenner mit 4 multiplicirt, den Bruch $\frac{36}{20}$, welcher 12 : 4, d. h. 3mal größer als $\frac{3}{5}$ ist. Denn $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4}$ (I.) $= \frac{12}{20}$, und $\frac{12}{20}$ ist offenbar 3mal kleiner als $\frac{36}{20}$, da 12 3mal kleiner als 36 ist. Hätte man umgekehrt den Zähler mit 4 und den Nenner mit 12 multiplicirt, so wäre der neue Bruch $\frac{12}{60}$ nunmehr wieder 12 : 4, d. h. 3mal kleiner, als $\frac{3}{5}$. Denn $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 12}{5 \times 12}$ (I.) $= \frac{36}{60}$ und $\frac{12}{60}$ ist 3mal kleiner als $\frac{36}{60}$.

§. 128. Zusatz. Soll also ein gegebener Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden, so kann dieses dadurch geschehen, daß dessen Zähler mit dieser ganzen Zahl multiplicirt und der Nenner ohne Veränderung unter das Product gesetzt wird. Z. B. $\frac{7}{9} \times 8 = \frac{7 \times 8}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ (§. 125. und §. 18.)

§. 129. Zusatz. Soll man hingegen einen Bruch durch eine gegebene Zahl dividiren, so kann dieses gesche-

hen, indem man den Nenner des Bruchs mit dieser Zahl multiplicirt; den Zähler aber unverändert läßt (§. 126. und §. 21.). Z. B. $\frac{5}{8} : 9 = \frac{5}{8 \times 9} = \frac{5}{72}$; oder $\frac{9}{17} : 6 = \frac{9}{17 \times 6} = \frac{9}{102}$.

§. 130. Lehrsatz. Wenn der Zähler eines gegebenen Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird; der Nenner hingegen unverändert bleibt, so wird der ganze Bruch so vielmal kleiner, als jene Zahl, womit man dividirt, Einheiten enthält.

Beweis. Weil der Zähler die Menge der Einheiten anzeigt, welche in dem ganzen Bruche enthalten sind (§. 117.), so wird, durch die Division des Zählers, die Menge dieser Bruchtheile offenbar so vielmal vermindert, als der Divisor selbst die Einheit enthält (§. 33.). Folglich wird auch der Bruch selbst so vielmal kleiner. Z. B. $\frac{18}{49}$ am Zähler durch 6 dividirt, gibt $\frac{18 : 6}{49} = \frac{3}{49}$, und der letzte Bruch ist 6mal kleiner, als der erste; gerade so wie z. B. 3 Gulden 6mal kleiner, als 18 Gulden ist.

§. 131. Lehrsatz. Wenn der Nenner eines gegebenen Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt und der hieraus entstehende Quotient wieder unter den vorigen Zähler gesetzt wird, so ist dieser neue Bruch so vielmal größer, als der erste, als wie viele Einheiten der Divisor enthält.

Beweis. Der Nenner zeigt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze ist eingetheilt worden (§. 117.). Durch die Division desselben mit der gegebenen ganzen Zahl wird der Nenner des neuen Bruchs so vielmal kleiner, als der gegebene, als wie viele Einheiten der Divisor enthält (§. 33.). Daher wird das Ganze nun auch in so vielmal weniger gleiche Theile getheilt, und eben hierdurch jeder einzelne Theil so vielmal größer. Folglich wird auch der ganze Bruch so vielmal größer. Z. B. $\frac{8}{18}$ am

Nenner mit 6 dividirt, gibt $\frac{8}{18:6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (§. 123.) und der letztere Bruch ist sechsmal größer, als der erste. — Denn es ist $\frac{8}{3} = \frac{48}{18}$ (§. 127. I.), und $\frac{48}{18}$ offenbar 6mal größer als $\frac{8}{18}$.

§. 132. Zusatz. I. Wird daher sowohl der Zähler, als der Nenner eines Bruchs mit einerlei dritten Zahl dividirt, so geben die Quotienten aus Zähler und Nenner des gegebenen Bruches den Zähler und Nenner eines neuen, welcher dem ersten vollkommen gleich ist. Denn durch die Division an dem Zähler wird derselbe so vielmal kleiner (§. 130.), als man ihn durch die Division an dem Nenner wieder größer macht (§. 131.). Folglich behält der Bruch seinen nämlichen Werth. Z. B.

$$\frac{248}{688} = \frac{248:2}{688:2} = \frac{124}{344}, \frac{124:2}{344:2} = \frac{62}{172} = \frac{62:2}{172:2} = \frac{31}{86}.$$

II. Die oben (§. 127. II. III. IV.) für die Multiplication bemerkten Veränderungen können auch hier für die Division am Zähler und Nenner durchgeführt werden. Solche Uebungen sind Anfängern sehr zu empfehlen.

§. 133. Zusatz. Soll daher ein gegebener Bruch mit einer ganzen Zahl dividirt werden, so darf man nur den Zähler desselben mit dieser Zahl dividiren, und den Nenner unverändert unter diesen Quotienten setzen. Denn hierdurch wird der Bruch so vielmal kleiner, als gefordert wird (§. 130.). So ist $\frac{36}{47} : 9 = \frac{36:9}{47} = \frac{4}{47}$.

§. 134. Zusatz. Sollte hingegen der angegebene Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt werden, so kann man den Nenner desselben mit ihr dividiren und über den Quotienten den unveränderten Zähler setzen. Denn hierdurch wird der Bruch so vielmal größer (§. 131.). Demnach ist $\frac{29}{48} \times 8 = \frac{29}{48:8} = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}$ (§. 123.).

§. 135. Zusatz. Aus dem Bisherigen folgt, daß man einen gegebenen Bruch auf zweierlei Art mit einer

ganzen Zahl multipliciren, und auch auf doppelte Art durch sie dividiren kann. Jenes geschieht nämlich, wenn man entweder seinen Zähler mit derselben multiplicirt (§. 128.), oder dessen Nenner mit ihr dividirt (§. 134.). Dieses hat Statt, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl dividirt (§. 133.) oder den Nenner mit derselben multiplicirt (§. 129.). Die Divisionen sind hierbei in der Regel nur dann vortheilhaft, wenn kein Rest bleibt.

§. 136. Erklärung. Einen Bruch heben, oder aufheben, heißt: denselben, seiner Größe unbeschadet, in einen andern verwandeln, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen, als Zähler und Nenner des gegebenen Bruches sind. Einen Bruch zur kleinsten Benennung bringen, heißt: denselben, ohne Veränderung seines Werthes, durch die kleinsten Zahlen ausdrücken, in welchen er dargestellt werden kann.

§. 137. Aufgabe. Einen gegebenen Bruch zu heben.

Auflösung. Man dividire den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch eine Zahl, welche in beiden ohne Rest aufgeht, so sind die Quotienten, in eben dieser Ordnung, Zähler und Nenner des zu findenden Bruchs.

Beweis. Der durch die Auflösung entstandene neue Bruch ist, in Rücksicht seiner Größe, mit dem gegebenen vollkommen einerlei (§. 132.). Auch sind Zähler und Nenner desselben kleinere Zahlen (§. 36. I.). Folglich ist der erstere Bruch gehoben (§. 136.).

Beispiele.

$$\frac{68}{184} = \frac{68:4}{184:4} = \frac{17}{46}; \quad \frac{608}{1792} = \frac{608:2}{1792:2} = \frac{304}{896} = \frac{304:2}{896:2} = \frac{152}{448} = \frac{152:2}{448:2} = \frac{76}{224} = \frac{76:2}{224:2} = \frac{38}{112} = \frac{38:2}{112:2} = \frac{19}{56};$$

$$\frac{30800}{40700} = \frac{308}{407} \text{ (§. 67.)} = \frac{308:11}{407:11} = \frac{28}{37} \text{ u. s. w.}$$

§. 138. Anmerkung. Die obige Auflösung setzt voraus, daß man eine dritte Zahl wisse, welche im Zähler und Nenner des angegebenen Bruches ohne Rest aufgeht, d. h. welche ein gemeinschaftlicher Factor vom Zähler und Nenner ist. Ohne dieses ist sie meist nicht von Nutzen. Es ist daher vortheilhaft, irgend ein Merkmal zu haben, welches angibt, ob eine, und welche Zahl das gemeinschaftliche Maß zweier andern ist. Daher bemerke man folgende Regeln:

1) Wenn sich 2 Zahlen auf 2, 4, 6, 8 oder 0 endigen, so lassen sie sich immer durch 2, bisweilen auch durch 6 oder 8 ohne Rest dividiren. Denn, wenn man mit 2 dividirt und die Division schließt sich nicht, so kann nur 1 zum Reste bleiben und es ist nun mit 2 in 12, 14, 16, 18 oder 10 zu dividiren, wodurch man 6, 7, 8, 9 oder 5 erhält.

2) Endigen sie sich auf 5 oder 0, so ist 5 ihr gemeinschaftliches Maß. Denn hier bleibt, wenn sich die Division nicht von selbst schon schließt, entweder 1 oder 2, 3, 4 als Rest, welcher, mit der niedrigsten Ziffer 5 oder 0 verbunden, die Zahlen 15, 25, 35, 45 oder 10, 20, 30, 40 bildet, in deren jeder die 5 ohne Rest enthalten ist.

3) Zahlen, deren niedrigste Ziffer eine 1, 3, 7 oder 9 ist, lassen sich entweder mit 3 oder 7, oder mit gar keiner dritten Zahl aufdividiren. Denn wenn bei der Division mit 3 eine 2 als Rest bleibt, so entsteht (mit 1) 21 und (mit 7) 27, welche beide Mehrfache von 3 sind. — Ist 7 der Divisor, so können sich hier die Zahlen 21, 63, 49 bilden, worin 7 ohne Rest aufgeht.

4) Wenn die Summe aller Ziffer einer Zahl die 3, oder ein Mehrfaches der 3 ausmacht, so ist diese Zahl durch 3 theilbar. Ein Beispiel wird den Grund dieser Regel aufklären. Es sei 624 die gegebene Zahl, bei welcher $6 + 2 + 4 = 12$ d. h. ein Mehrfaches von 3 ist. Man erkennt nun sogleich, daß

$$624 = 600 + 20 + 4, \text{ oder}$$
$$624 = 6 . 100 + 2 . 10 + 4, \text{ oder}$$
$$624 = 6 . (99 + 1) + 2 . (9 + 1) + 4, \text{ oder}$$
$$624 = 6 . 99 + 6 + 2 . 9 + 2 + 4, \text{ d. h.}$$
$$624 = 6 . 99 + 2 . 9 + 6 + 2 + 4 \text{ ist.}$$

Da nun 3 in 99 ohne Rest aufgeht, so ist 3 auch in 6 mal 99 und, weil 3 in 9 genau enthalten ist, so muß auch 3 in 2 mal 9, und folglich auch in der Summe $6 + 99 + 2 \times 9$ ohne Rest enthalten seyn. Da aber ferner, der Annahme gemäß, 3 in der Ziffersumme $6 + 2 + 4$ genau aufgeht, so muß auch die Summe:

$$6 . 99 + 2 . 9 + 6 + 2 + 4$$

ein Mehrfaches von 3 seyn. — Dieser Beweis kann auf jedes andere Beispiel dieser Art angewendet werden.

5) Zahlen, deren Ziffer zusammen eine 9 oder ein Mehrfaches der 9 geben, sind durch 9 ohne Rest theilbar. Es sei z. B. die gegebene Zahl diese: 73584, worin $7 + 3 + 5 + 8 + 4 = 27 = 3$ mal 9 ist, so wird

$73584 = 70000 + 3000 + 500 + 80 + 4 = 7 . (9999 + 1) + 3 . (999 + 1) + 5 . (99 + 1) + 8 . (9 + 1) + 4 = 7 . 9999 + 7 + 3 . 999 + 3 + 5 . 99 + 5 + 8 . 9 + 8 + 4 = 7 . 9999 + 3 . 999 + 5 . 99 + 8 . 9 + 7 + 3 + 5 + 8 + 4.$ Da nun 9 sowohl in 9999 als in 999, 99 und in 9 selbst ohne Rest enthalten ist, so muß es auch in der Summe:

$$7 . 9999 + 3 . 999 + 5 . 99 + 8 . 9$$

ohne Rest aufgehen, und da, nach der Annahme, $7 + 3 + 5 + 8 + 4$ ein Mehrfaches von 9 ist, so muß 9 auch in der ganzen Summe, d. h. in der Zahl 73584 ohne Rest enthalten seyn.

6) Wenn eine Zahl aus zwe gleichen Ziffern besteht, so ist sie durch 11, und wenn sie aus drei gleichen Ziffern zusammengesetzt ist, durch 37 theilbar. Denn wenn mit 37 in 111 dividirt wird, so erhält man 3 zum Quotienten d. h. 37 ist in 111 gerade 3 mal enthalten. Da nun 222 zweimal größer als 111 ist, so muß auch 37 in 222 zweimal so oft, d. h. 6 mal enthalten seyn. Aus gleichem Grunde ist 37 in 333 gerade 9 mal, in 444 aber 12 mal enthalten; und es müssen somit die Quotienten aus 37 in 555, 666, 777, 888 und 999 der Reihe nach die Zahlen 15, 18, 21, 24 und 27 seyn.

§. 139. Anmerkung. I. Durch das bisherige Verfahren ist man im Stande, einen gegebenen Bruch durch kleinere Zahlen auszudrücken. Es gibt aber nebst diesem eine Methode, wodurch ein Bruch zur kleinsten Benennung (§. 136.) gebracht werden kann. Sie ist folgende:

1) Man dividire den Zähler des gegebenen Bruchs, welcher bei einem ächten Bruche, der hier vorausgesetzt wird, allemal kleiner, als der Nenner ist (§. 120.), in seinen Nenner. Bleibt hier kein Rest übrig, so ist der Zähler selbst der größte gemeinschaftliche Factor. Z. B. $\frac{12}{96} = \frac{12 : 12}{96 : 12} = \frac{1}{8}$, wo offenbar $\frac{1}{8}$ der kleinste Ausdruck von $\frac{12}{96}$ seyn muß, da der Zähler eines Bruches nie kleiner als 1 werden kann. Denn von Brüchen, deren Zähler selbst wieder ein

Bruch ist, kann hier noch keine Rede seyn. (Man sehe unten §. 177, a. II.)

2) Bleibt hingegen bei der Division in 1) noch ein Rest, so dividire man wieder mit diesem Reste in den vorigen Divisor. Geht diese Division ohne weitern Ueberrest auf, so ist der zuvor gebliebene Rest der größte gemeinschaftliche Factor vom Zähler und Nenner. Wenn z. B. $\frac{7}{27}$ der gegebene Bruch ist, so gibt das Verfahren Folgendes:

```
6 | 27 | 4
    24
   ----
    3 | 6 | 2
        6
       ---
        0
```

Hier ist der Ueberrest aus der ersten Division genau in dem ersten Divisor enthalten; folglich ist 3 der gemeinschaftliche Factor. Es ist nämlich $27 = 24 + 3$. Allein da 6 in 24 gerade 4 mal enthalten ist, so muß 3 in 24 noch einmal so oft d. h. 8 mal enthalten seyn. Da aber 27 um 3 mehr als 24 ist, so muß auch 3 in 27 gerade $8 + 1$ mal d. h. 9 mal ohne Rest enthalten seyn. Demnach ist hier der Rest 3 ein Factor vom Dividenden 27, wenn diese 3 ein Factor vom Divisor 6 ist. — Daß aber auch dieser Rest 3 die größte Zahl ist, mit welcher man sowohl die 6 als die 27 ohne Rest aufdividiren kann, geht daraus hervor, daß keine größere Zahl als 3 (hier weder 4 noch 5) in 6 mehr als einmal ganz enthalten seyn kann. Daher $\frac{6}{27} = \frac{6\ :\ 3}{27\ :\ 3} = \frac{2}{9}$ und diese $\frac{2}{9}$ sind die kleinste Benennung von $\frac{6}{27}$.

3) Geht bei der zweiten Division der Divisor wieder nicht genau in dem Dividenden auf, so dividire man abermals mit diesem neuen Reste in den letztern Divisor. Ist dieser genau ein Mehrfaches vom letztern Reste, so ist dieser Ueberrest wieder jene Zahl, womit der Bruch zur kleinsten Benennung gebracht werden kann. Es sei $\frac{10}{18}$ der gegebene Bruch, so entsteht folgende Rechnung:

```
10 | 18 | 1
     10
    ----
     8 | 10 | 1
          8
        ----
          2 | 8 | 4
              8
             ---
              0
```

Hier ist 2 der gemeinschaftliche Divisor und $\frac{10}{18} = \frac{10:2}{18:2} = \frac{5}{9}$ Die Entwickelung des Grundes, worauf die Richtigkeit dieses Verfahrens beruhet, ist der vorigen ähnlich.

4) Man fahre, wenn bei fortgesetzten Divisionsarbeiten immer noch Reste bleiben, nach 2) und 3) fort, bis entweder die Division eines solchen Restes in den unmittelbar vorhergegangenen Divisor aufgeht, oder bis man zu einem Reste kommt, welcher = 1 ist. In diesem letzten Falle ist es ein Zeichen, daß der Bruch, so wie er gegeben ist, schon auf der kleinsten Benennung sei. Man denke sich z. B. $\frac{19}{25}$, so gibt die Rechnung dieses:

```
19 | 25 | 1
     19
   -------
      6 | 19 | 3
          18
        ------
           1 | 6 | 6
               6
             -----
               0
```

Nach diesem wäre 1 der gemeinschaftliche Factor. Durch Multiplication und Division einer Zahl mit 1 wird aber diese Zahl selbst durchaus nicht verändert. Daher kann der gegebene Bruch $\frac{19}{25}$ nicht weiter mehr durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden.

II. Hier ist eine schickliche Stelle, den Unterschied zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen zu erklären. Zahlen, welche nicht durch die Multiplication anderer Zahlen entstehen können, heißen Primzahlen; z. B. 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 u. s. w. Diese Zahlen haben keine andere Factoren, als sich selbst und die Einheit, da z. B. $13 = 13 \times 1 = 1 \times 13$ ist. Zusammengesetzte Zahlen sind dagegen jene, welche sich in Factoren zerlegen lassen, aus deren Multiplication dieselben hervorgehen; z. B. $18 = 6 \times 3 = 9 \times 2$; $21 = 7 \times 3$; $48 = 12 \times 4 = 8 \times 6 = 24 \times 2 = 16 \times 3$ u. s. w. Wenn mehrere Zahlen gegeben sind, welche keine gemeinschaftlichen Factoren haben, so heißen sie Primzahlen unter sich, wenngleich einige von ihnen zusammengesetzte Zahlen sind, auch wohl einen gemeinschaftlichen Factor enthalten können. So sind z. B. 8, 21 und 7 Primzahlen unter sich, so wie auch 12, 18, 6 und 11. Wenn demnach Brüche gehoben werden sollen, so dürfen ihre Zäh-

ler und Nenner weder absolute Primzahlen, noch Primzahlen unter sich seyn (§. 137.).

§ 140. Anmerkung. Weil man in kleinern Zahlen sowohl leichter und geschwinder rechnen, als auch die Größe eines Bruches um so bequemer übersehen kann, so leuchtet es von selbst ein, wie nützlich die Auflösung dieser Aufgabe für den ausübenden Rechner ist.

§. 141. Erklärung. I. Brüche unter einerlei Benennung bringen, heißt: dieselbe, ohne ihre Größe zu verändern, in andere verwandeln, welche alle einerlei Nenner haben.

II. Brüche, welche einerlei Nenner haben, werden gleichartige; solche, welche verschiedene Nenner haben, aber ungleichartige Brüche genennt. So sind z. B. $\frac{7}{19}$ und $\frac{12}{19}$ gleichartig, weil das Ganze bei beiden in 19 gleiche Theile eingetheilt ist; aber $\frac{8}{17}$ und $\frac{4}{5}$ sind ungleichartig, weil jener Bruch Siebenzehntel, dieser Fünftel, und somit verschiedenartige Theile mit jenem enthält.

§. 142. Aufgabe. Zwei gegebene Brüche, deren Nenner verschieden sind, unter einerlei Benennung zu bringen.

Auflösung. Man multiplicire den Nenner eines jeden Bruches mit dem Zähler des andern, und die beiden Nenner unter sich. Jene Producte geben die beiden Zähler der zu findenden Brüche in der nämlichen Ordnung; dieses hingegen ist ihr gemeinschaftlicher Nenner.

Beweis. Durch die Auflösung wurde Zähler und Nenner eines jeden der zwei gegebenen Brüche mit einerlei Zahl (dem Nenner des andern Bruches) multiplicirt; folglich bleiben diese Brüche in ihrem Werthe unverändert (§. 127, I.). Auch werden hierdurch die neuen Nenner zwei Producte aus einerlei Factoren; folglich sind sie an Größe einander gleich. (§. 30, IV.)

Beispiele.

Die Brüche seien $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{9}$, so ist $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63}$ und $\frac{4}{9} = \frac{4 \times 7}{9 \times 7} = \frac{28}{63}$, und man hat $\frac{45}{63}$ und $\frac{28}{63}$ so groß, als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{9}$. Ferner: $\frac{12}{19}$ und $\frac{28}{47}$ gibt $\frac{12}{19} = \frac{12 \times 47}{19 \times 47} = \frac{564}{893}$ und $\frac{28}{47} = \frac{28 \times 19}{47 \times 19} = \frac{532}{893}$.

§. 143. Anmerkung. Wenn der Fall eintritt, daß der Nenner des einen Bruchs in jenem des andern ohne Rest aufgeht, so multiplicire man Zähler und Nenner jenes Bruchs mit dem Quotienten aus beiden Nennern. Der hieraus entstehende neue Bruch ist nun mit dem andern von einerlei Benennung. Die Brüche seien $\frac{7}{12}$ und $\frac{19}{36}$, so ist 12 in 36 ohne Rest 3 mal enthalten, und man sagt: $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 3}{12 \times 3} = \frac{21}{36}$, welcher Bruch mit dem andern $\frac{19}{36}$ einerlei Nenner hat. — Sind die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{211}{96}$, so ist $96 : 8 = 12$, und $\frac{7}{8} = \frac{7 \times 12}{8 \times 12} = \frac{84}{96}$, welcher wieder mit dem andern den nämlichen Nenner hat. Der hieraus entstehende Vortheil ist dieser, daß beide Brüche nunmehr in kleinern Zahlen ausgedrückt werden. Die beiden ersten Brüche dieser Beispiele, nämlich $\frac{7}{12}$ und $\frac{19}{36}$ hätten nach der gewöhnlichen Regel Folgendes gegeben: $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 36}{12 \times 36} = \frac{252}{432}$ und $\frac{19}{36} = \frac{19 \times 12}{36 \times 12} = \frac{228}{432}$.

§. 144. Aufgabe. Wenn mehr als zwei Brüche gegeben sind, dieselben unter einerlei Nenner zu bringen.

Auflösung. Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einem Producte aus den Nennern der noch übrigen Brüche, so entstehen eben so viele neue, welche jenen, nach der nämlichen Ordnung, gleich sind und mit ihnen einerlei Benennung haben.

Beweis. Daß die gefundenen Brüche den gegebenen einzeln gleich sind, erhellet daraus, weil Zähler und Nenner eines jeden mit einerlei Zahl multiplicirt worden ist (§. 127, I.). Daß sie aber alle auch einerlei Nenner haben, ist daraus klar, weil die neuen Nenner Producte aus allen gegebenen Nennern sind (§. 30, IV.).

Beispiele.

Die gegebenen Brüche seien $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, so ist

$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 9 \times 4 \times 5}{7 \times 9 \times 4 \times 5}$,

$\frac{8}{9} = \frac{8 \times 7 \times 4 \times 5}{9 \times 7 \times 4 \times 5}$,

$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7 \times 9 \times 5}{4 \times 7 \times 9 \times 5}$,

$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 7 \times 9 \times 4}{5 \times 7 \times 9 \times 4}$; oder, wenn man die nur angezeigte Multiplication wirklich ausführt, so wird $\frac{5}{7} = \frac{900}{1260}$; $\frac{8}{9} = \frac{1120}{1260}$, $\frac{3}{4} = \frac{945}{1260}$, $\frac{2}{5} = \frac{504}{1260}$.

Wäre nebst den obigen vier Brüchen noch der fünfte $\frac{6}{11}$ gegeben, so müßte man so rechnen:

$\frac{5}{7} = \frac{900 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{9900}{13860}$,

$\frac{8}{9} = \frac{1120 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{12320}{13860}$,

$\frac{3}{4} = \frac{945 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{10395}{13860}$,

$\frac{2}{5} = \frac{504 \times 11}{1260 \times 11} = \frac{5544}{13860}$ und endlich

$\frac{6}{11} = \frac{1260 \times 6}{1260 \times 11} = \frac{7560}{13860}$ wodurch alle fünf Brüche einerlei Nenner erhalten haben.

§. 145. Anmerkung. Wenn die Nenner der gegebenen Brüche einen gemeinschaftlichen Factor haben, so lassen sich dieselben, mit Beibehaltung ihres Werthes und mit dem kleinsten Ausdrucke ihrer Zähler und Nenner, dadurch unter einerlei Benennung bringen, daß man mit diesem gemeinsamen Factor in den Nenner des 2ten, 3ten, 4ten Bruchs u. s. f. dividirt. Das Product aus diesen Quotienten in den Nenner des ersten Bruchs gibt nun den kleinsten Hauptnenner aller Brüche. Dividirt man sodann diesen Hauptnenner mit dem Nenner des ersten Bruchs und multiplicirt den Quotienten mit dessen Zähler, so erhält man den Zähler des ersten neuen Bruches, und auf ähnliche Art jeden folgenden. Die Brüche seien $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ und $\frac{11}{14}$, so ist 2 gemeinschaftlicher Factor aller Nenner, und $6 \times 5 \times 7 = 210$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Daher wird $\frac{210}{6} \times 5 = 35 \times 5 = 175$ der Zähler des 1sten; $\frac{210}{10} \times 7 = 21 \times 7 = 147$ der Zähler des 2ten; $\frac{210}{14} \times 11 =$

$15 \times 11 = 165$ der Zähler des 3ten Bruches, und die drei Brüche sind folgende: $\frac{175}{210}$, $\frac{147}{210}$ und $\frac{165}{210}$. Nach der gewöhnlichen Rechnung wären sie $\frac{700}{840}$, $\frac{588}{840}$ und $\frac{660}{840}$ geworden.

Die Richtigkeit dieser Vorschrift geht aus Nachstehendem hervor. Die drei Brüche sind

$$\frac{5}{6},\ \frac{7}{10} \text{ und } \frac{11}{14}$$

Wird jeder mit 2 gehoben, so erhält man (nach §. 137.)

$$\frac{\frac{5}{2}}{3} \qquad \frac{\frac{7}{2}}{5} \qquad \frac{\frac{11}{2}}{7}$$

Diese, auf gewöhnliche Weise unter einerlei Benennung gebracht, geben

$$\frac{\frac{5 \times 35}{2}}{3 \times 35} \qquad \frac{\frac{7 \times 21}{2}}{5 \times 21} \qquad \frac{\frac{11 \times 15}{2}}{7 \times 15}$$

Wird mit den Nennern $3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15 = 105$ wirklich in jeden der drei Brüche

$$\frac{5 \times 35}{2} \qquad \frac{7 \times 21}{2} \qquad \frac{11 \times 15}{2}$$

dividirt, welches (§. 129.) geschieht, indem man ihre Nenner 2 mit 105 multiplicirt, so erhält man

$$\frac{5 \times 35}{2 \times 105} \qquad \frac{7 \times 21}{2 \times 105} \qquad \frac{11 \times 15}{2 \times 105}$$

oder die vorigen Brüche:

$$\frac{175}{210} \qquad \frac{147}{210} \qquad \frac{165}{210}.$$

§. 146. Anmerkung. Wenn man alle Nenner der gegebenen Brüche in ihre einfache Factoren zerlegen kann, (d. h. in solche, aus deren Producte jene Zahlen hervorgehen und welche selbst nicht wieder als Producte aus zwei Zahlen entspringen) so setze man alle diese Factoren (woraus der gewöhnliche Hauptnenner entstände) neben einander, streiche jene aus, welche bereits aus den andern Nennern vorkommen und multiplicire die noch übrigen mit einander, so gibt das Product den kleinsten Hauptnenner aller Brüche, woraus man (nach §. 145.) Zähler und Nenner jedes andern Bruches leicht finden kann. Die Brüche seien z. B. $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$, so sind die einfachen Factoren ihrer Nenner diese: $2 \times 2 \times 3 \mid \dot{2} \times 5 \mid \dot{2} \times 2 \times \dot{2} \mid \dot{3} \times \dot{5} \mid \dot{3} \times 7 \mid \dot{2} \times \dot{7}$. Werden nun hier die mit Puncten bezeichneten Factoren weggelassen, so bleibt $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 7 = 840$ als der kleinste Hauptnenner aller Brüche. Daher wird der erste Zähler

$= \frac{840}{12} \times 5 = 350$; der 2te Zähler $= \frac{840}{10} \times 3 = 84 \times 3 = 252$; der 3te Zähler $\frac{840}{8} \times 7 = \frac{5880}{8} = 735$; der 4te $= \frac{840}{15} \times 11 = 56 \times 11 = 616$; der 5te $= \frac{840}{21} \times 4 = 160$ und der 6te $= \frac{840}{14} \times 1 = 60$. Daher sind die sechs neuen Brüche diese: $\frac{350}{840}$, $\frac{252}{840}$, $\frac{735}{840}$, $\frac{616}{840}$, $\frac{160}{840}$ und $\frac{60}{840}$. — Der Grund dieses Verfahrens wird recht augenfällig, wenn man die gegebenen sechs Brüche in folgende, ihnen einzeln genommen gleiche verwandelt: $\frac{5}{2 \times 2 \times 3}$; $\frac{3}{2 \times 5}$; $\frac{7}{2 \times 2 \times 2}$; $\frac{11}{3 \times 5}$; $\frac{4}{3 \times 7}$ und $\frac{1}{2 \times 7}$ und nun die Rechnung auf gewöhnliche Art (§. 144.) ausführt.

§. 147. Aufgabe. Wenn mehrere Brüche gegeben sind, zu bestimmen, wie sie in Rücksicht ihrer Größe aufeinander folgen.

Auflösung. Wenn die gegebenen Brüche schon einerlei Nenner haben, so folgen sie in Rücksicht ihrer Größe aufeinander, wie ihre Zähler folgen. Haben sie aber verschiedene Nenner, so bringe man sie zuvor (nach §. 144.) auf gleiche Benennung, wo sich nun die Brüche in ihrer Größe ebenfalls nach den Zählern richten.

Beweis. Brüche sind Zahlen (§. 116.), welche aus Einheiten bestehen, deren Art der Nenner (§. 117.) und deren Menge der Zähler (§. 117.) anzeigt. Haben nun mehrere Brüche einerlei Nenner, so sind ihre Einheiten gleiche Theile eines auf gleiche Art getheilten Ganzen, und jener Bruch muß größer seyn, welcher mehr solcher Theile enthält, d. h. dessen Zähler der größere ist. Man fragt z. B. wie die Brüche $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ aufeinander folgen. Nach §. 144. ist der erste $\frac{8}{11} = \frac{8 \times 9 \times 12}{11 \times 9 \times 12} = \frac{864}{1188}$, $\frac{5}{9} = \frac{5 \times 11 \times 12}{9 \times 11 \times 12} = \frac{660}{1188}$; $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 11 \times 9}{12 \times 11 \times 9} = \frac{693}{1188}$. Nun ist aber von den letztern drei Brüchen $\frac{864}{1188}$ der größte, $\frac{693}{1188}$ der folgende, und $\frac{660}{1188}$ der kleinste; folglich stehen die drei gege-

benen Brüche ihrer Größe nach in dieser Ordnung: $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{9}$ nacheinander.

§. 148. Anmerkung. I. Ferner folgt aus dem Bisherigen, daß von zwei Brüchen, welche einerlei Zähler haben, derjenige der größere ist, welcher den kleinern Nenner hat. So ist z. B. $\frac{7}{11}$ größer als $\frac{7}{13}$, weil $\frac{1}{11}$ größer als $\frac{1}{13}$ ist. Ebenso ist umgekehrt jener Bruch in diesem Falle der kleinere, welcher den größern Nenner hat. Es ist z. B. $\frac{7}{25}$ kleiner als $\frac{7}{16}$, weil $\frac{1}{25}$ kleiner als $\frac{1}{16}$ ist.

II. Wenn der Zähler eines Bruches größer ist, als der Zähler eines andern; sein Nenner aber kleiner, als des andern Nenner, so ist jener Bruch offenbar größer als dieser. So ist z. B. $\frac{8}{13}$ größer, als $\frac{5}{19}$. Denn $\frac{1}{13}$ ist größer als $\frac{1}{19}$, folglich sind auch $\frac{8}{13}$ größer, als $\frac{8}{19}$ und somit auch größer, als $\frac{5}{19}$. — Desgleichen auch umgekehrt.

III. Weil die Brüche Zahlen sind (§. 116.), so müssen auch alle in §. 24. angezeigte Veränderungen bei Brüchen Statt haben; d. h. es gibt eine Addition, eine Subtraction, eine Multiplication und eine Division in Brüchen.

I. Die Addition.

§. 149. Grundsatz. Brüche, welche addirt werden sollen, müssen gleichartig seyn; denn sie sind Zahlen (§. 27, I.). Brüche sind aber von einerlei Art, wenn sie gleiche Nenner und ungleichartig, wenn sie verschiedene Nenner haben, weil der Nenner die Art der Theile anzeigt (§. 117. und 141, II.). Folglich müssen die zu addirenden Brüche einerlei Nenner haben.

§. 150. Aufgabe. Mehrere gegebene Brüche zusammen zu addiren.

Auflösung. I. Wenn alle zu addirende Brüche schon einerlei Nenner haben, so addire man ihre Zähler, und setze unter ihre Summe den gemeinschaftlichen Nenner einmal.

II. Haben hingegen die gegebenen Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie zuerst (nach §. 114.) auf einerlei Benennung, und verfahre nun nach I.

Beweis. Wenn die gegebenen Brüche einerlei Nenner haben, so drücken ihre Zähler die Mengen der in ihnen vorhandenen Einheiten aus (§. 117.). Daher wird die Summe dieser Einheiten gefunden, wenn man die Zähler aller Brüche addirt. Haben dieselben aber verschiedene Nenner, so müssen sie (wegen §. 149.) zuerst unter einerlei Nenner gebracht und hernach ihre Zähler wieder addirt werden. Weil aber durch die Addition gleichartiger Dinge ihre Art nicht verändert wird, so darf der gemeinschaftliche Nenner nur einmal gesetzt werden.

Beispiel. I. Wenn $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$ addirt werden sollen, so ist ihre Summe offenbar $= \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$ Denn ebenso wie 7 Gulden zu 11 Gulden addirt, 18 Gulden gibt, so gilt dasselbige hier auch von den Zwölfteln.

II. Soll man aber die Brüche $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{3}{5}$ zusammenaddiren, so geben dieselbe (nach §. 144.) folgende: $\frac{225}{360}$, $\frac{280}{360}$ und $\frac{216}{360}$. Folglich ist nun $\frac{5}{8} + \frac{7}{9} + \frac{3}{5} = \frac{225}{360} + \frac{280}{360} + \frac{216}{360} = \frac{225 + 280 + 216}{360} = \frac{721}{360} = 2\frac{1}{360}$. — Die Brüche $\frac{18}{29}$ und $\frac{46}{97}$ geben (nach §. 142.) $\frac{1746}{2213}$ und $\frac{1334}{2813}$; folglich ist $\frac{18}{29} + \frac{46}{47} = \frac{1746}{2813} + \frac{1434}{2813} = \frac{3080}{2813} = 1\frac{267}{2813}$.

§. 151. Zusatz. Sollte man Ganze nebst Brüchen zu Ganzen und Brüchen addiren, so kann dieses auf doppelte Art geschehen. Entweder

I. Indem man die Brüche einrichtet, d. h. jede ganze Zahl nebst ihrem Bruche in einen einzigen Bruch verwandelt, welcher so groß ist, als diese ganze Zahl nebst dem angehängten Bruche. Dieses geschieht aber

(nach §. 124.) dadurch, daß man jede ganze Zahl mit dem Nenner des an ihr angehängten Bruches multiplicirt, zum Producte den Zähler eben dieses Bruches addirt und und unter diese Summe jenen Nenner setzt. — Auf ähnliche Art richte man alle übrigen Brüche ein; z. B. $7\frac{2}{3} + 9\frac{6}{7} + 3\frac{1}{4} = \frac{7 \times 3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9 \times 7}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3 \times 4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} + \frac{63}{7} + \frac{6}{7} + \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{21 + 2}{3} + \frac{63 + 6}{7} + \frac{12 + 1}{4} = \frac{23}{3} + \frac{69}{7} + \frac{13}{4}$, wo diese Brüche nun nach §. 150, II. summirt werden. — Oder auf eine kürzere und deshalb in den meisten Fällen vorzüglichere Art, indem man

II. Die gegebenen ganzen Zahlen zuerst und nachher auch die sich bei ihnen befindlichen Brüche (nach §. 150.) in eine Summe bringt, und die aus den beiden Brüchen allenfalls entstehenden Ganzen dazu zählt. Z. B. $12\frac{4}{9} + 7\frac{5}{8} = 12 + 7 + \frac{4}{9} + \frac{5}{8} = 19 + \frac{32}{72} + \frac{45}{72} = 19 + \frac{77}{72} = 19 + 1 + \frac{5}{72} = 20\frac{5}{72}$.

§. 152. Anmerkung. Am Schlusse dieser Lehre von der Addition in gemeinen Brüchen wird man sich leicht überzeugen, wieviel bequemer eben diese Rechnungsart in Decimalbrüchen (§. 98.) sei. Will man aber diese Bequemlichkeit genießen, so müssen die gemeinen Brüche zuerst in zehntheilige verwandelt werden können, wozu folgende Aufgabe dient.

§. 153. Aufgabe. Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung. I. Wenn der gegebene Bruch ein ächter ist, so enthält er keine Ganze. Um seine Zehntel zu finden, setze man zur Rechten des Zählers eine Nulle und dividire mit dem Nenner in dieses Zehnfache des Zählers. Bleibt kein Rest, so stellt der Quotient den Werth des Bruchs in Zehntel dar. Entsteht aber ein Rest, so hänge man wieder eine Nulle an ihn, dividire abermals mit dem Nenner in die erhaltene Zahl, so zeigt der Quotient

die Menge der im Bruche enthaltenen Hundertel an. Auf diese Weise fahre man so lange fort, bis die Division sich entweder einmal abschließet, oder bis man so kleine Decimaltheilchen erhalten hat, daß sie der Schärfe der Rechnung genügen (Siehe Beispiele I., II., III. und IV.).

II. Ist aber der angegebene Bruch ein unächter, so bestimme man durch die Division mit dessen Nenner in den Zähler zuerst die Ganzen (§. 123.) und sodann (nach I.) die noch dazu gehörigen Decimalbruchtheile (Siehe die Beispiele V. und VI.).

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht theils auf §. 89., theils auf §. 123. und bedarf demnach hier keiner neuen Entwickelung.

Beispiele.

I. $\frac{3}{5} = 0, \frac{30}{5}$ d. h. $\frac{30}{5}$ Zehntel d. h. $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

II. $\frac{7}{8} = 0{,}875$. Die wirkliche Rechnung ist diese:

```
8 | 7 | 0,875
    70
    64
    --
     60
     56
     --
      40
      40
      --
      00 ohne Rest.
```

III. $\frac{5}{12} = 0, \frac{5000000\ldots}{12} = 0{,}416666\ldots.$

IV. $\frac{5}{7} = 0, \frac{50000000\ldots}{7} = 0{,}71428571\ldots.$

V. $\frac{124}{9} = 13 + \frac{7}{9}$. Allein $\frac{7}{9} = 0, \frac{70000\ldots}{9} = 0{,}7777\ldots.$

Daher $\frac{124}{9} = 13{,}7777\ldots.$

VI. $\frac{423}{8} = 52\,\frac{7}{8} = 52{,}875.$

§. 154. Zusatz. I. Wenn die zu addirenden Brüche folgende sind: $\frac{3}{8}$, $\frac{17}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{12}{7}$ und $\frac{1}{4}$, so sage man

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{8} = 0{,}375 \\ \frac{17}{9} = 1{,}8888888\ldots \\ \frac{3}{11} = 0{,}2727272\ldots \\ \frac{12}{7} = 1{,}7142857\ldots \\ \frac{1}{4} = 0{,}25\end{array}\right\}\text{ in Decimalbruchtheile verwandelt.}$$

$$\overline{\quad 4{,}5009017\ldots\text{ Summe,}}$$

welche bis auf die Stelle der Milliontel genau ist.

II. Um sich von der Richtigkeit dieser Auflösung durch eine Proberechnung zu überzeugen, addire man die gegebenen Brüche nach der gewöhnlichen Vorschrift (§. 150). Verwandelt man sodann den als Summe gefundenen Bruch in einen Decimalbruch, so muß man 4,500901 . . . . erhalten. Diese Rechnung ist eine sehr lehrreiche Uebung für die ersten Anfänger.

III. Wollte man die fünf gegebenen Brüche (in I.) zuerst unter gleiche Benennung bringen, und sodann addiren, so würde diese Rechnung viel beschwerlicher seyn. Die Verwandlung jener Brüche in Decimalbrüche gewährt demnach hierbei einen bedeutenden Vortheil.

II. Die Subtraction.

§. 155. Grundsatz. Brüche, welche von einander abgezogen werden sollen, müssen gleichartig seyn; denn Brüche sind Zahlen (§. 27, I.). Die Gleichartigkeit der Brüche hängt aber von der Gleichheit ihrer Nenner ab (§. 141, II.). Folglich müssen die zu subtrahirenden Brüche einerlei Nenner haben.

§. 156. Aufgabe. Einen kleinern Bruch von einem größern zu subtrahiren.

Auflösung. I. Wenn die zwei gegebenen Brüche schon einerlei Nenner haben, so ziehe man den kleinern Zähler von dem größern ab und setze unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner.

II. Haben sie aber verschiedene Nenner, so bringe man sie zuerst (nach §. 144.) unter gleiche Benennung und verfahre nunmehr nach I.

Beweis. Der Unterschied zweier gleichartigen Brüche besteht in dem Unterschied ihrer Einheiten. Nun drücken aber die Zähler der Brüche die Menge dieser Einheiten aus (§. 117.) Folglich ist der Unterschied der Zähler auch der Unterschied dieser Menge ihrer Einheiten. Um aber zugleich die Art dieser Einheiten zu wissen, muß der gemeinschaftliche Nenner wieder darunter gesetzt werden, indem durch das Abziehen diese Art der Brüche nicht verändert werden kann.

Beispiele.

I. Es ist $\frac{20}{37} - \frac{14}{37} = \frac{6}{37}$; ferner $\frac{248}{359} - \frac{185}{359} = \frac{248 - 185}{359} = \frac{63}{359}$ u. s. w.

II. $\frac{12}{19} - \frac{7}{15} = \frac{12 \times 15}{19 \times 15} - \frac{7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{12 \times 15 - 7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{180 - 133}{285} = \frac{47}{285}$. Ferner $\frac{8}{19} - \frac{15}{47} = \frac{8 \times 47}{19 \times 47} - \frac{15 \times 19}{47 \times 19} = \frac{8 \times 47 - 15 \times 19}{47 \times 19} = \frac{376 - 285}{893} = \frac{91}{893}$ u. s. f.

§. 157. Aufgabe. Einen Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen, welcher größer als jener Bruch ist.

Auflösung. Man multiplicire den Nenner des gegebenen Bruchs mit der ganzen Zahl, wovon der Abzug geschehen soll, nehme von diesem Producte den Zähler desselben hinweg, und setze unter den Unterschied den Nenner, so ist der hierdurch entstehende Bruch, woraus man nöthigen Falles die Ganzen ziehen muß, die gesuchte Differenz.

Beweis. Durch das Verfahren in der Auflösung wird (§. 124.) die ganze Zahl in einen Bruch verwandelt, welcher mit dem gegebenen einerlei Nenner hat. Wenn aber die beiden Brüche einerlei Nenner haben, so darf man nur den kleinern Zähler von dem größern abziehen und unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner setzen (§. 156.). Folglich ist die Auflösung richtig.

Beispiele. Man soll von 18 den Bruch $\frac{14}{5}$ abziehen. Hier ist $18 - \frac{14}{5} = \frac{18 \times 5}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18 \times 5 - 14}{5} = \frac{90 - 14}{5} = \frac{76}{5} = 15\frac{1}{5}$. Ferner $28 - \frac{30}{7} = \frac{28 \times 7}{7} - \frac{30}{7} = \frac{28 \times 7 - 30}{7} = \frac{196 - 30}{7} = \frac{166}{7} = 23\frac{5}{7}$.

§. 158. Anmerkung. I. Die so eben gegebene Auflösung ist eine allgemeine, d. h. eine solche, welche auf alle hierher gehörige Subtractionsfälle paßt. Ist aber der abzuziehende Bruch ein ächter (§.120.), so wird diese Auflösung kürzer, wenn man von der ganzen Zahl eine Einheit wegnimmt, dieselbe in einen Bruch, welcher mit dem gegebenen einerlei Nenner hat, verwandelt (§. 124.), den kleinern Bruch nun von dem größern abzieht, und die um 1 verminderte ganze Zahl diesem Reste beifügt. So ist z. B. $15 - \frac{6}{17} = 14 + 1 - \frac{6}{17} = 14 + \frac{17}{17} - \frac{6}{17} = 14 + \frac{17 - 6}{17} = 14 + \frac{11}{17}$. Oder $26 - \frac{12}{47} = 25 + 1 - \frac{12}{47} = 25 + \frac{47}{47} - \frac{12}{47} = 25 + \frac{47 - 12}{47} = 25 + \frac{35}{47}$.

II. Auch kann, wenn der abzuziehende Bruch ein unächter ist, eine ähnliche Auflösung Statt finden, wenn man die Ganzen bestimmt, welche in dem uneigentlichen Bruche enthalten sind und zuerst diese Ganze und (wenn noch ein unächter Bruch dabei ist) auch diesen von der gegebenen ganzen Zahl abzieht. So ist z. B. $15 - \frac{26}{7} = 15 - 3\frac{5}{7} = 12 - \frac{5}{7} = 11\frac{2}{7}$. Ferner ist $20 - \frac{17}{8} = 20 - 2\frac{1}{8} = 18 - \frac{1}{8} = 17\frac{7}{8}$.

§. 159. Aufgabe. Eine ganze Zahl nebst einem Bruche von einer ganzen Zahl und einem Bruche abzuziehen.

Auflösung. Das allgemeine Verfahren zur Auflösung (was indessen nicht immer das kürzeste ist) besteht

darin, daß man die Brüche zuerst einrichtet (§. 151, I.), sie hernach unter einerlei Benennung bringt (§. 142.), und endlich den Abzug (nach §. 156.) verrichtet.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht auf den §§. 151, I.; 142 und 156.

Beispiele.

Man soll von $12\frac{4}{9}$ abziehen $8\frac{6}{13}$. Hier ist $12\frac{4}{9} - 8\frac{6}{13} = \frac{112}{9} - \frac{110}{13} = \frac{112 \times 13}{9 \times 13} - \frac{110 \times 9}{13 \times 9} = \frac{112 \times 13 - 110 \times 9}{9 \times 13} = \frac{1456 - 990}{117} = \frac{466}{117} = 3\frac{115}{117}$. Desgleichen ist $5\frac{2}{3} - 2\frac{5}{7} = \frac{17}{3} - \frac{19}{7} = \frac{119 - 57}{21} = \frac{62}{21} = 2\frac{20}{21}$.

§. 160. Anmerkung. I. Hat der Fall Statt, daß der Bruch an der abzuziehenden Zahl kleiner, als jener der andern ist, wovon der Abzug geschehen soll, so ziehe man die Ganzen von den Ganzen und auch die Brüche von einander ab. Z. B. $18\frac{3}{4} - 12\frac{1}{2} = 18 - 12 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) = 6 + \frac{6 - 4}{8} = 6 + \frac{2}{8} = 6 + \frac{1}{4}$.

II. Auch wenn der an der kleinern Zahl hängende Bruch größer, als der an der größern Zahl ist, kann man auf ähnliche Weise verfahren. Z. B. $20\frac{4}{11} - 8\frac{7}{12} = 20\frac{48}{132} - 8\frac{77}{132} = 19 + \frac{132}{132} + \frac{48}{132} - 8\frac{77}{132} = 19\frac{180}{132} - 8\frac{77}{132} = 11\frac{180 - 77}{132} = 11\frac{103}{132}$.

Diese Auflösung wird meist bequemer, als die eben (§. 159.) angegebene seyn.

§. 161. Anmerkung. I. Auch die Subtraction in gemeinen Brüchen kann öfters mit mehr Bequemlichkeit ausgeführt werden, wenn man sie zuerst in Decimalbrüche verwandelt, und diese sodann von einander abzieht. Folgende Beispiele erläutern dieses:

A. $\frac{7}{12} - \frac{4}{15} = 0{,}58333 \ldots - 0{,}26666 \ldots = 0{,}31667 \ldots$ Hier ist wieder $0{,}26666 + 0{,}32667 = 0{,}58333$.

B. $8 - \frac{157}{28} = 8 - 5{,}60714 \ldots = 2{,}39286 \ldots$ Auch hier ist $5{,}60714 + 2{,}39286 = 8$.

C. $216\frac{8}{11} - 87\frac{7}{15} = 216{,}727272 - 87{,}466666 = 129{,}260606$. Man hat wieder $87{,}466666 + 129{,}260606 = 216{,}727272$.

II. Zur Uebung kann diese Subtraction in gewöhnlichen Brüchen verrichtet und sodann der erhaltene Rest wieder in einen Decimalbruch verwandelt werden, welcher mit dem vorhin gefundenen zum Wenigsten bis auf die vorletzte Ziffer übereinstimmen muß.

III. Auch können bei der Addition und bei der Subtraction gemeine Brüche mit Decimalbrüchen in Verbindung vorkommen; z. B. $\frac{3}{8} + 0{,}3572 + 8{,}45 = 0{,}375 + 0{,}3572 + 8{,}45 = 9{,}1822$. Oder: $\frac{5}{8} - 0{,}2594 = 0{,}625 - 0{,}2594 = 0{,}3656$ u. s. w. Es ist zweckmäßig, sich in dergleichen Aufgaben zu üben.

II. Die Multiplication.

§. 162. Aufgabe. Einen ächten Bruch mit einem ächten Bruche zu multipliciren.

Auflösung. Man multiplicire die beiden Zähler und auch die beiden Nenner mit einander. Jenes Product gibt den Zähler, dieses den Nenner des Products.

Beweis. Einen Bruch mit einem Bruche multipliciren, heißt so viel, als denselben mit einem Quotienten, d. h. mit einer Zahl multipliciren, welche durch eine andere dividirt ist (§. 122, I.). Multiplicirt man nun den Bruch mit dieser ersten Zahl allein, so wird das Product offenbar so vielmal zu groß werden, als wie viele Einheiten die andere Zahl enthält. Daher muß man, um das richtige Factum zu bekommen, jenes Product wieder eben so vielmal kleiner machen, welches geschieht, wenn dasselbe durch diese andere Zahl dividirt wird. Nun geschieht aber die erste Multiplication durch die Vermehrung der beiden Zähler (§. 125.) und die letztere Division durch die Multiplication der beiden Nenner (§. 126.). Daher ist die Auflösung gerechtfertigt. So heißt z. B. $\frac{5}{6}$ mit $\frac{3}{4}$

multipliciren so viel, als $\frac{5}{6}$ mit der Zahl 3, welche durch 4 dividirt ist, multipliciren. Wird daher $\frac{5}{6}$ mit 3 multiplicirt, so ist das Product $\frac{5 \times 3}{6}$ offenbar viermal zu groß, weil $\frac{5}{6}$ nur mit dem vierten Theil von 3 multiplicirt werden sollte. Daher muß dieses Product $\frac{5 \times 3}{6}$ wieder viermal kleiner gemacht werden, welches $\frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ gibt.

Anderer Beweis. Zwei ächte Brüche miteinander multipliciren heißt (nach §. 30, II.) soviel, als den einen so oft nehmen, als der andere die Einheit enthält. Nun enthält aber der Multiplicator nur Theile der Einheit (§. 120.); folglich ist diese Multiplication so viel, als von dem Multiplicanden ein solches Stück nehmen, als der Multiplicator es anzeigt. Um dieses zu finden, muß der Multiplicand in so viele gleiche Theile eingetheilt werden, als der Nenner des Multiplicators dieses fodert und dann müssen wieder so viele dieser Theile genommen werden, als der Zähler es vorschreibt. Nun geschieht aber jenes durch die Multiplication des Nenners in den Nenner und dieses durch die Multiplication der beiden Zähler mit einander (§§. 125, 126.). Folglich ist die Auflösung richtig. So heißt z. B. $\frac{5}{6}$ mit $\frac{3}{4}$ multipliciren soviel, als von $\frac{5}{6}$ den $\frac{3}{4}$ Theil, d. h. von $\frac{5}{6}$ den vierten Theil 3mal nehmen. Nun ist aber der vierte Theil von $\frac{5}{6} = \frac{5}{6 \times 4}$ (§. 126.) und dieses 3mal genommen gibt $\frac{5 \times 3}{6 \times 4}$ (§. 125.). Folglich ist $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{6 \times 4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Beispiele.

$\frac{7}{9} \times \frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{9 \times 6} = \frac{35}{54}$. Ferner $\frac{11}{29} \times \frac{15}{37} = \frac{11 \times 15}{29 \times 37} = \frac{165}{1073}$. Oder $\frac{20}{37} \times \frac{7}{11} = \frac{20 \times 7}{37 \times 11} = \frac{140}{407}$ u. s. w.

§. 163. Zusatz. Sollten zwei uneigentliche Brüche unter sich, oder sollte ein uneigentlicher Bruch mit einem eigentlichen multiplicirt werden, so ist die Auflösung die

nämliche, wie im vorigen §., indem der dortige Beweis ganz allgemein ist und hier wieder seine vollkommene Anwendung findet. Z. B. $\frac{17}{4} \times \frac{18}{5}$ heißt nichts anderes, als von $\frac{17}{4}$ den 5ten Theil 18mal nehmen. Dieses wird aber $= \frac{17 \times 18}{4 \times 5} = \frac{306}{20} = 15\frac{6}{20} = 15\frac{3}{10}$. Oder $\frac{25}{9} \times \frac{5}{8}$ heißt soviel, als von $\frac{25}{9}$ den 8ten Theil 5mal nehmen, welches $= \frac{25 \times 5}{9 \times 8} = \frac{125}{72} = 1\frac{53}{72}$ wird.

§. 164. Zusatz. Sind mehr, als zwei Brüche gegeben, aus welchen ein Product gebildet werden soll, so ist das Factum ein Bruch, dessen Zähler ein Product aller Zähler, und dessen Nenner ein Product aller Nenner ist. Z. B. $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{7 \times 4 \times 2}{9 \times 5 \times 3} = \frac{56}{135}$. Denn $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = (\frac{7}{9} \times \frac{4}{5}) \times \frac{2}{3}$. Allein $\frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}$; folglich $(\frac{7}{9} \times \frac{4}{5}) \times \frac{2}{3} = \frac{28}{45} \times \frac{2}{3} = \frac{56}{135}$. — Ebenso wird der Beweis geführt, wenn vier, fünf und mehrere Bruchfactoren gegeben sind.

§. 165. Zusatz I. Ein Product aus zwei Brüchen, deren einer ein ächter und der andere ein unächter ist, wird kleiner als dieser andere. Denn man nimmt nur einen Theil von diesem letztern (§. 161.). Z. B. $\frac{15}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{32} = 1\frac{13}{32}$. Allein $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} = 1\frac{28}{32}$; folglich $\frac{45}{32}$ kleiner, als $\frac{15}{8}$. — Ist der andere Factor auch ein ächter Bruch, so wird das Product kleiner, als jeder der beiden Factoren. Denn von jedem Factor wird durch die Multiplication nur ein Theil des andern Factors genommen. Z. B. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{40}$, und dieses Product ist kleiner als jeder der einzelnen Factoren. Denn $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$ und $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$. Es heißt nämlich $\frac{7}{8}$ mit $\frac{3}{5}$ multipliciren nichts anderes, als man soll von $\frac{7}{8}$ nur $\frac{3}{5}$, oder man soll von $\frac{3}{5}$ nur $\frac{7}{8}$ nehmen.

II. Hieraus folgt, daß die Multiplication mit einem ächten Bruche eigentlich eine Verminderung des Mul-

tiplicanden und nichts anders als eine Division sei. So heißt z. B. mit $\frac{1}{2}$ multipliciren soviel, als die Hälfte nehmen, oder mit 2 dividiren; mit $\frac{1}{3}$ multipliciren heißt, den dritten Theil nehmen, oder mit 3 dividiren u. s. w.

§. 166. Zusatz. I. Einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, lehrt §. 125. und §. 131. Sollte umgekehrt eine ganze Zahl durch einen Bruch multiplicirt werden, so dürfte nur der Zähler des Bruches mit dieser Zahl multiplicirt und der Nenner unter das Product gesetzt werden. Denn diese Zahl mit einem Bruche multipliciren heißt, den sovielten Theil derselben nehmen, als der Bruch es anzeigt, und nun bezieht sich der Beweis wieder auf §. 162. So heißt $8 \times \frac{5}{9}$ soviel, als von 8 den 9ten Theil fünfmal nehmen. Daher ist $8 \times \frac{5}{9} = \frac{8 \times 5}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$.

II. Auch könnte diese Multiplication noch dadurch ausgeführt werden, daß man mit dem Nenner des Bruchs in die ganze Zahl dividirte und den Quotienten mit seinem Zähler multiplicirte. Es ist z. B. $18 \times \frac{5}{6} = \frac{18}{6} \times 5 = 3 \times 5 = 15$. — Die vorige Auflösung (I.) gäbe $18 \times \frac{5}{6} = \frac{18 \times 5}{5} = \frac{90}{6} = 15$ und somit ebendieses.

§. 167. Aufgabe. Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen zu multipliciren.

Auflösung. Man richte die gegebenen Brüche ein (§. 151, I.), und vollziehe nun die Multiplication nach §. 163.

Beweis. Diese Vorschrift beruht offenbar auf den in den §§. 151, I. und 163 enthaltenen Beweisen.

Beispiele.

$8\frac{7}{11} \times 6\frac{3}{7} = \frac{95}{11} \times \frac{45}{7} = \frac{95 \times 45}{11 \times 7} = \frac{4275}{77} = 55\frac{40}{77}$. Oder $10\frac{6}{7} \times 9\frac{7}{9} = \frac{76}{7} \times \frac{88}{9} = \frac{76 \times 88}{7 \times 9} = \frac{6688}{63} = 106\frac{10}{63}$.

§. 168. Anmerkung. I. Nebst der obigen Auflösung im vorigen §. gibt es noch eine andere, welche sich darauf gründet, daß das Product aus zwei Factoren, deren jeder aus mehreren Theilen besteht, erhalten wird, wenn man jeden einzelnen Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt, und hernach sämmtliche Theil-Facta zusammen addirt. Z. B. $(8 + \frac{2}{3}) \times (6 + \frac{8}{9}) = 8 \times 6 + \frac{2}{3} \times 6 + 8 \times \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{8}{9} = 48 + \frac{12}{3} + \frac{64}{9} + \frac{16}{27} = 48 + 4 + \frac{192}{27} + \frac{16}{27} = 52 + \frac{208}{27} = 52 + 7\frac{19}{27} = 59\frac{19}{27}$.

II. Auch bei der Multiplication kommen oft Verbindungen von gemeinen Brüchen mit Decimalbrüchen vor, die nach den bisherigen Regeln leicht aufzulösen sind. So ist z. B. $0{,}3847 \times \frac{4}{5} = \frac{0{,}3847 \times 4}{5} = \frac{1{,}5388}{5} = 0{,}30776$. Oder $8{,}0037 \times \frac{5}{9} = \frac{8{,}0037 \times 5}{9} = \frac{40{,}0185}{9} = 4{,}4465$. Ferner $12{,}4 \times \frac{3}{11} = \frac{12{,}4 \times 3}{11} = \frac{37{,}2}{11} = 3{,}381818 \ldots$ u. s. f.

§. 169. Anmerkung. Zu der Multiplication der ganzen Zahlen und Brüche gehören auch jene Fälle, wo man den Bruch einer gegebenen höhern Werthart in Einheiten einer niedrigern Art verwandeln soll.

I. Man verlangt zu wissen, wie viele Kreuzer $\frac{7}{9}$ eines Gulden betragen. Weil 1 Gulden aus 60 Kr. besteht, so ist offenbar $\frac{7}{9}$ des Gulden so viel als $\frac{7 \times 60}{9}$ Kr. Allein $\frac{7 \times 60}{9} = \frac{420}{9} = 46\frac{6}{9} = 46\frac{2}{3}$ Kr. Aber, wie viele Pfennige machen diese $\frac{2}{3}$ Kr.? Weil 4 Pf. einen Kr. betragen, so ist $\frac{2}{3}$ Kr. $= \frac{2 \times 4}{3}$ Pf. $= \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ Pf. Folglich ist $\frac{7}{9}$ Gulden $= 46$ Kr. nebst 2 und $\frac{2}{3}$ Pf.

II. Wie viele Pfunde betragen $\frac{14}{25}$ eines Centners? Hier ist $\frac{14}{25}$ Cent. $= \frac{14 \times 100}{25}$ Pfund $= \frac{1400}{25}$ Pfund $= 56$ Pfunde.

III. Wie viele Lothe geben $\frac{28}{39}$ eines Pfundes? Die Rechnung gibt $\frac{28}{39}$ Pf. $= \frac{28 \times 32}{39}$ Lothe $= \frac{896}{39} = 22\frac{38}{39}$ Lothe $= 22$ Lothe $\frac{38 \times 4}{39}$ Quent. $= 22$ Loth $\frac{152}{39}$ Quent. 22 Lothe $3\frac{35}{39}$ Quentchen.

Nach diesen Mustern werden alle ähnliche Aufgaben behandelt.

§. 170. Anmerkung. Auch lassen sich die in dem vorigen §. gefundenen Brüche sehr leicht in Decimalbruchtheilen ausdrücken. Da $\frac{7}{9}$ des Guldens so viel als $46\frac{2}{3}$ Kreuzer betragen. (§. 169, I.), so ist auch $\frac{7}{9}$ fl. $=$ 46,666 . . . Kreuzer? — Eben so betragen (nach II.) $\frac{28}{39}$ des Pfundes soviel als $22\frac{38}{39}$ Lothe. Dieses gibt nun auch $\frac{28}{39}$ Pfunde $=$ 22,974 . . . Lothe u. s. f.

§. 171. Anmerkung. Auch könnte man hier fragen, wie viel eine bestimmte Menge einer niedern Werthart in Decimaltheilchen der gegebenen höhern betrage; z. B. wie viele Zehntheile des Guldens sind 7 Kreuzer? — Da 1 Gulden 60 Kr., so ist 1 Kr. $= \frac{1}{60} =$ 0,01666 . . fl. Daher sind 7 Kr. $=$ 0,01666 $\times$ 7 $=$ 0,11662 . . Gulden.

Ferner: Wie viele Decimaltheile des Pfundes sind 18 Lothe? — Da 1 Pfund $=$ 32 Lothe, so ist 1 Loth $= \frac{1}{32} =$ 0,03125 Pfunde (ohne Rest). Folglich sind diese 18 Lothe $=$ 0,03125 $\times$ 18 oder 0,5625 des Pfundes. Nach diesen Mustern können alle ähnliche Fälle behandelt werden.

IV. Die Division.

§. 172. Lehrsatz. Der Quotient zweier Brüche, welche einerlei Nenner haben, ist der Quotient, welcher herauskommt, wenn der Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors dividirt wird.

Beweis. Der Quotient ist eine Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal der Dividend größer als der Divisor ist (§. 36., I.). Nun zeigen aber die Zähler der Brüche die Mengen ihrer Einheiten an (§. 117, I.) und diese Einheiten sind auch, bei gleichen Nennern, von der nämlichen Art (§. 141, II.). Daher wird der eine Bruch so vielmal größer, als der andere seyn, wie vielmal der Zähler des einen größer, als der Zähler des andern ist. Folglich ist der Quotient der Zähler der Quotient der Brüche selbst.

Beispiele. $\frac{45}{7} : \frac{15}{7} = 45 : 15 = 3$, d. h. der Bruch $\frac{45}{7}$ ist 3mal größer, als $\frac{15}{7}$. Und in der That ist auch

$\frac{15}{7} \times 3 = \frac{45}{7}$ (§. 125.). Ferner ist $\frac{8}{17} : \frac{4}{17} = 8 : 4 = 2$, oder $\frac{8}{17}$ ist noch einmal so groß als $\frac{4}{17}$, weil jener Bruch noch einmal so viele Einheiten von der nämlichen Art enthält, als dieser. Desgleichen ist $\frac{7}{11} : \frac{3}{11} = 7 : 3 = 2\frac{1}{3}$; d. h. $\frac{7}{11}$ ist 2 und $\frac{1}{3}$mal größer, als $\frac{3}{11}$. Wirklich ist auch 2mal $\frac{3}{11} = \frac{6}{11}$; $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{11} = \frac{1}{11}$ und $\frac{6}{11} + \frac{1}{11} = \frac{7}{11}$. Endlich ist $\frac{5}{12} : \frac{8}{12} = \frac{5}{8}$; d. h. $\frac{5}{12}$ ist $\frac{5}{8}$mal größer, als $\frac{8}{12}$; wo denn auch $\frac{8}{12} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$ ist.

Man überzeugt sich hierdurch, daß der Quotient zweier Brüche, welche gleiche Nenner haben, entweder eine ganze Zahl, oder ein ächter Bruch, oder eine gemischte Zahl seyn muß. Auch ist es einleuchtend, daß der Nenner der beiden Brüche nicht in dem Quotienten erscheinen kann. Denn gleichwie z. B. 15 Gulden 5mal (aber nicht 5 Gulden mal) größer als 3 Gulden sind, so sind auch $\frac{15}{8}$ gerade 5mal (und nicht $\frac{5}{8}$mal) größer als $\frac{3}{8}$.

§. 173. Aufgabe. Bei zwei gegebenen ungleichartigen Brüchen den einen durch den andern zu dividiren.

Auflösung. Man setze in dem Divisor den Nenner an die Stelle des Zählers, den Zähler an die Stelle des Nenners und multiplicire nun mit diesem umgekehrten Theilerbruch den Dividenden (nach §. 162 und 163.), so ist das hieraus entstehende Product der gesuchte Quotient.

Beweis. Wenn man die gegebenen Brüche (nach §. 142.) unter einerlei Benennung bringt, so wird aus dem zu theilenden Bruche ein anderer, dessen Zähler ein Product aus seinem Zähler in den Nenner des Divisors und dessen Nenner ein Factum aus seinem Nenner in den Nenner des Divisors wird. Desgleichen wird aus dem Divisorbruche ein neuer, dessen Zähler ein Product aus seinem Zähler in den Nenner des Dividenden, dessen Nenner hingegen

wieder ein Factum der beiden Nenner ist. Der Quotient beider Brüche ist nun (nach §. 172) ein Quotient aus den beiden Zählern, und folglich ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus dem Zähler des Dividenden in den Nenner des Divisors; dessen Nenner hingegen ein Factum aus dem Nenner des Dividenden in den Zähler des Divisors ist. Da aber Zähler und Nenner dieses Quotienten Producte sind, welche aus zwei Factoren bestehen, so kann man sich denselben als ein Factum aus zwei Brüchen vorstellen, deren erster der gegebene Dividend selbst, der letztere hingegen der umgekehrte Divisor ist. Folglich ist der obige Lehrsatz hierdurch allgemein bewiesen. Erläuterungen in Zahlen werden dieses deutlicher machen.

Erläuterung über diesen Beweis.

Wenn $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so ist $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{8 \times 3}{9 \times 3} : \frac{2 \times 9}{3 \times 9} = 8 \times 3 : 2 \times 9$ (§. 172.) $= \frac{8 \times 3}{2 \times 9} = \frac{8}{9} \times \frac{3}{2}$ (§. 162 u. f.). Folglich heißt $\frac{8}{9}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiren soviel, als $\frac{8}{9}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren.

Anderer Beweis.

Wenn z. B. $\frac{5}{8}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so heißt dieses so viel, als $\frac{5}{8}$ soll durch 3mal $\frac{1}{4}$ dividirt werden. Da nun 1 in $\frac{5}{8}$ gerade $\frac{5}{8}$mal enthalten ist, so muß der 4te Theil von 1, d. h. $\frac{1}{4}$, viermal mehr in $\frac{5}{8}$ enthalten seyn, oder $\frac{5}{8} : \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \times 4 = \frac{5 \times 4}{8}$. Nun soll aber $\frac{5}{8}$ nicht durch $\frac{1}{4}$, sondern durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden; folglich muß der Quotient wieder 3mal kleiner werden oder er ist $= \frac{5 \times 4}{8 \times 3}$. Daher wird $\frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{5 \times 4}{8 \times 3} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3}$. Die Allgemeinheit dieses Beweises leuchtet von selbst ein.

Beispiele.

$\frac{17}{25} : \frac{5}{7} = \frac{17}{25} \times \frac{7}{5} = \frac{17 \times 7}{25 \times 5} = \frac{119}{125}$. Ferner $\frac{18}{49} : \frac{4}{7}$ $= \frac{18}{39} \times \frac{7}{4} = \frac{18 \times 7}{39 \times 4} = \frac{126}{156} = \frac{21}{26}$.

§. 174. Zusatz. Wenn der Divisor ein ächter Bruch ist, so wird der Quotient größer, als der Dividend. Denn bei einem ächten Bruche ist der Zähler kleiner als der Nenner (§. 119, II. §. 120.). Folglich wird, bei der Umkehrung desselben (§. 173.) der neue Zähler größer, als der Nenner; daher der Zähler des Dividenden mit einer größern Zahl multiplicirt, als dessen Nenner, und folglich das Product oder der Quotient größer (§§. 125—127.). Auch wird dieses schon daraus klar, daß hier der Divisor kleiner, als 1 ist. Denn wäre er = 1, so würde der Quotient dem Dividenden gleich. Ueberhaupt folgt hieraus, daß die Division mit einem ächten Bruche eigentlich eine Multiplication des Dividenden ist.

Beispiele.

$\frac{17}{8} : \frac{2}{3} = \frac{17}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{51}{16}$. Allein $\frac{17}{8} = \frac{17 \times 2}{8 \times 2} = \frac{34}{16}$ kleiner, als $\frac{51}{16}$. Desgleichen $\frac{6}{7} : \frac{3}{5} = \frac{6}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{30}{21}$, wo wieder $\frac{30}{21}$ größer, als $\frac{6}{7}$ oder als $\frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{18}{21}$ ist.

§. 175. Aufgabe. Eine gegebene ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren.

Auflösung. Man multiplicire die Zahl mit dem Nenner des Bruchs, und setze unter dieses Product dessen Zähler.

Beweis. Wenn die ganze Zahl in einen Bruch verwandelt wird, der mit dem gegebenen einerlei Nenner hat, so muß dieselbe mit diesem Nenner zugleich multiplicirt und dividirt werden (§. 124.). Auf diese Art sind aber zwei Brüche, welche einerlei Nenner haben, mit ein=

ander zu dividiren. Dieses geschieht, indem (nach §. 172.) der Zähler des Dividenden durch jenen des Divisors dividirt wird. Nun ist aber der Zähler des Dividenden ein Product aus der gegebenen Zahl in den Nenner des Bruchs, und der Zähler des Divisors ist der Zähler des Bruchs, folglich auch der Quotient ein Bruch, dessen Zähler ein Factum aus der ganzen Zahl und dem Nenner, und dessen Nenner der Zähler des Divisors ist.

Erläuterung dieses Beweises.

$8 : \frac{3}{5} = \frac{8 \times 5}{5} : \frac{3}{5} = (8 \times 5) : 3 = \frac{8 \times 5}{3} = 8 \times \frac{5}{3}$ (§. 166.).

Auch läßt sich die Richtigkeit der Auflösung auf folgende Art erkennen: $8 : \frac{3}{5} = 8 : 3 \times \frac{1}{5}$. Allein $8 : \frac{1}{5} = 8 \times 5$ (§. 174). Folglich ist $8 : 3 \times \frac{1}{5} = (8 \times 5) : 3 = \frac{8 \times 5}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Beispiele.

$9 : \frac{6}{7} = 9 \times \frac{7}{6} = \frac{63}{6} = 10\frac{3}{6} = 10\frac{1}{2}$, wo (wegen §. 174.) der Quotient größer als der Dividend ist. Ferner $15 : \frac{3}{8} = 15 \times \frac{8}{3} = \frac{15 \times 8}{3} = \frac{120}{3} = 40$.

§. 176. Zusatz. Sollte ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so gibt es (nach §. 135.) eine doppelte Auflösung dieser Aufgabe, indem man entweder mit dem Divisor in des Bruchs Zähler dividirt, oder dessen Nenner damit multiplicirt. Z. B. $\frac{8}{15} : 4 = \frac{8 : 4}{15} = \frac{2}{15}$ Oder $\frac{8}{15} : 4 = \frac{8}{4 \times 15} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$, wo jenes Verfahren, wenn die Division ohne Rest ausgeführt werden kann, vor diesem gewöhnlich den Vorzug verdient.

§. 177. Aufgabe. Ganze und Brüche durch ganze Zahlen und Brüche zu dividiren.

Auflösung. Man richte die Brüche nach §. 151, I. ein, und verrichte die Division nach §. 173.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht auf den in der Auflösung angeführten §§. 151, I. und 173.

Beispiele.

$8\frac{5}{7} : 5\frac{8}{9} = \frac{61}{7} : \frac{53}{9} = \frac{61}{7} \times \frac{9}{53} = \frac{549}{371} = 1\frac{178}{871}$.

Ferner $12\frac{7}{8} : 7\frac{2}{3} = \frac{103}{8} : \frac{23}{3} = \frac{103}{8} \times \frac{3}{23} = \frac{309}{184} = 1\frac{125}{184}$.

§. 177. a. Anmerkung. I. Bei der Division in Brüchen kommen ebenfalls öfters Verbindungen der gemeinen Brüche mit Decimalbrüchen vor. So ist z. B. $0{,}3842 : \frac{4}{5} = \frac{0{,}3842 \times 5}{4} = \frac{1{,}9210}{4} = 0{,}48025$; oder $3{,}529 : \frac{3}{7} = \frac{3{,}529 \times 7}{3} = \frac{24{,}703}{3} = 8{,}23433 \ldots$

Endlich ist $\frac{7}{9} : 0{,}3524 = \frac{7}{9 \times 0{,}3524} = \frac{7}{3{,}1716} = 2{,}2070879 \ldots$

II. Auch kann man sich Brüche denken, deren Zähler oder Nenner, oder beide zugleich, wiederum Brüche sind. Ihr eigentlicher Werth ist nicht schwer zu bestimmen. Es ist z. B.

1) $\frac{\frac{4}{5}}{11}$ ein Bruch, welcher $= \frac{4}{5} : 11$ und folglich $= \frac{4}{5 \times 11} = \frac{4}{55}$ ist.

Der zuerst gegebene Bruch heißt nämlich soviel als: das Ganze ist in 11 gleiche Theile eingetheilt worden und von diesen ist kein ganzes 11tel, sondern es sind nur $\frac{4}{5}$ eines 11tel vorhanden. Nun ist aber $\frac{1}{5}$ vom 11tel soviel als $\frac{1}{55}$; folglich müssen $\frac{4}{5}$ dieses 11tel nothwendigerweise $\frac{4}{55}$ betragen.

2) $\frac{3}{\frac{5}{9}}$ ist ein Bruch, welcher $= 3 : \frac{5}{9} = 3 \times \frac{9}{5} = \frac{3 \times 9}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ ist.

3) $\frac{\frac{7}{9}}{\frac{5}{11}}$ heißt nichts anderes, als $\frac{7}{9} : \frac{5}{11} = \frac{7}{9} \times \frac{11}{5} = \frac{77}{45} = 1\frac{32}{45}$ u. s. w.

Sechste Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

---

§. 178. Erklärung. Wenn man sich zwei Zahlen denkt, so kann entweder jede derselben für sich, als eine bestimmte Menge von Einheiten betrachtet werden; oder man kann die eine mit der andern vergleichen. Eine Vergleichung zweier Zahlen in Rücksicht ihrer Größe, heißt ein Verhältniß; die Zahlen selbst, welche mit einander verglichen werden, nennt man die Glieder des Verhältnisses.

§. 179. Anmerkung. Wer sich die Zahlen 12 und 4 bloß als Mengen von 12 und von 4 Einheiten vorstellt, betrachtet diese Zahlen für sich, ohne sie mit einander zu vergleichen. Wenn man hingegen diese 12 und 4 in Bezug auf ihre wechselseitige Größe mit einander vergleicht, und so z. B. bestimmt, daß die 12 dreimal größer, als die 4, oder daß 4 um 8 Einheiten kleiner, als 12 sei, so heißt eine solche Vergleichung zwischen 12 und 4 ein Verhältniß, und die Zahlen 12 und 4 werden die Glieder dieses Verhältnisses genennt.

§. 180. Erklärung. Diese Vergleichung zweier Zahlen in Rücksicht ihrer Größe kann auf doppelte Art geschehen. Entweder untersucht man bei zwei gegebenen Zahlen, um wieviele Einheiten die eine größer, als

die andere ist; oder man bestimmt, wievielmal die eine größer, als die andere ist. Außer diesen beiden Arten, die zwei angegebenen Zahlen zu vergleichen, läßt sich keine andere mehr denken. Im ersten Falle nennt man die Vergleichung ein arithmetisches, im letzten ein geometrisches Verhältniß.

§. 181. Erklärung. I. Das arithmetische Verhältniß (§. 180.) untersucht, um wieviele Einheiten eine Zahl größer, als die andere ist. Dieses wird aber durch die Subtraction der kleinern Zahl von der größern bestimmt (§. 31.). Folglich ist das schicklichste Zeichen für das arithmetische Verhältniß jenes der Subtraction (in §. 50.), welches zwischen die beiden Glieder desselben gesetzt wird. So zeigt 18 — 12 das arithmetische Verhältniß der Zahlen 18 und 12 an. Die 18 und die 12 heißen dessen Glieder, und insbesondere wird 18 das erste, oder vorhergehende; 12 aber das zweite, oder nachfolgende Glied genennt. Da 18 — 12 = 6, so heißt diese dritte Zahl, um welche die beiden Glieder von einander unterschieden sind, der Unterschied oder die Differenz des Verhältnisses.

II. Man sagt hier nicht: 18 weniger 12 ist gleich 6, sondern: 18 verhält sich zu 12; oder: das arithmetische Verhältniß von 18 zu 12 ist gleich 6.

§. 182. Erklärung. I. Das geometrische Verhältniß (§. 180.) bestimmt, wievielmal eine Zahl größer, als die andere ist. Dieses erfährt man aber durch die Division (§. 21.). Folglich ist das natürlichste Zeichen des geometrischen Verhältnisses jenes der Division (in §. 63.), welches zwischen die beiden Glieder gesetzt wird. So bestimmt 24 : 8 das geometrische Verhältniß der Zahlen 24 und 8. Jene Zahl heißt das erste, oder vorhergehende; diese das zweite, oder folgende Glied

des Verhältnisses. Eine dritte Zahl, welche anzeigt, wie oft das zweite Glied in dem ersten enthalten ist, wird der Exponent des Verhältnisses, oder der Verhältnißname genennt. So ist in 24 : 8 der Exponent = 3.

II. Man sagt hier nicht: 24 dividirt durch 8 ist gleich 3, sondern: 24 verhält sich (geometrisch) zu acht; oder: das geometrische Verhältniß von 24 zu 8 ist gleich 3.

III. Wäre das zweite Glied größer als das erste, z. B. in dem Verhältnisse 7 : 12, so würde der Exponent ein Bruch, hier $\frac{7}{12}$, seyn. Das Weitere hiervon folgt unten (§. 201. u. f.).

§. 183. Grundsätze. I. In jedem Verhältnisse müssen zwei Glieder seyn; ein vorhergehendes, und ein nachfolgendes (§. 178.).

II. Die Glieder eines Verhältnisses müssen unter sich gleichartig seyn. Denn nur bei gleichartigen Größen kann man eine Differenz oder einen Quotienten finden (§. 33, I. §. 21.). Es können demnach z. B. 20 Pfunde mit 5 Meilen kein Verhältniß bilden. Denn man kann von 20 Pfunden keine 5 Meilen hinwegnehmen, noch können 5 Meilen in 20 Pfunden wirklich enthalten seyn.

III. Die Größe eines Verhältnisses hängt nicht von der Größe seiner Glieder ab; sondern, wenn es ein arithmetisches ist, von der Größe der Differenz, und wenn es ein geometrisches ist, von der Größe des Exponenten. Es wird demnach der Werth eines arithmetischen Verhältnisses durch seine Differenz; der Werth eines geometrischen Verhältnisses aber durch den Exponenten bestimmt. — Das Weitere hierüber folgt unten (§. 186. u. §. 202.).

§. 184. Erklärung. Ein Verhältniß der Gleichheit ist ein solches, worin beide Glieder einander gleich sind. Z. B. 8 — 8 = 0; 5 : 5 = 1. Sind die Glieder einander ungleich, so heißt es ein Verhältniß der Un-

gleichheit, welches entweder vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern seyn kann; je nachdem das erste Glied kleiner, als das zweite, oder dieses kleiner, als das erste ist. Z. B. 4 — 7; 14 — 9; 6 : 10; 20 : 5.

§. 185. **Grundsätze** für das arithmetische Verhältniß.

I. In dem arithmetischen Verhältnisse der Gleichheit (§. 184.) ist die Differenz = 0.

II. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern (§. 184.) ist die Differenz jene Zahl, welche entsteht, indem man das zweite Glied von dem ersten abzieht. Z. B. 12 — 7 = 5.

III. Bei dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern ist die Differenz jene Zahl, welche herauskommt, wenn das erste Glied vom zweiten weggenommen wird. Z. B. 6 — 10 = 4. Denn eine größere Zahl von einer kleinern abzuziehen, ist eine Aufgabe, deren Auflösung den Begriff der negativen Zahlen voraussetzt. Um ihn den ersten Anfängern zu erläutern, bemerke man folgendes: Wenn auf einem Tische 6 Guldenstücke liegen und es foderte jemand, man solle 10 Guldenstücke von ihnen hinwegnehmen, so könnte diesem keine andere Antwort gegeben werden, als: um 10 Guldenstücke wegnehmen zu können, fehlen noch 4 solcher Geldstücke. Diese 4 fehlenden oder mangelnden Einheiten werden, in Bezug auf die 6 wirklich vorhandenen, die negativen genennt. Die vorhandenen aber heißen die positiven. — Wenn man das Vermögen eines Menschen das Positive nennt, so bilden seine Schulden das Negative. In dem zweiten Theile dieser Schrift wird aus=

führlich von diesen positiven und negativen Zahlen, welche man mit einem Worte: entgegengesetzte nennt, gehandelt.

IV. Bei dem Verhältnisse in II. ist das erste Glied die Summe aus dem zweiten und dem Unterschiede (§. 33, II.) und das zweite Glied der Unterschied des ersten und der Differenz (§. 51. I.). In dem obigen Beispiele ist nämlich $12 = 7 + 5$ und $7 = 12 - 5$.

V. Bei dem Verhältnisse in III. ist das erste Glied die Differenz aus dem zweiten und dem Unterschiede (§. 51, I.); das zweite Glied aber die Summe aus dem ersten und dem Unterschiede (§. 33. II.). Es ist nämlich in obigem Beispiele $6 = 10 - 4$ und $10 = 6 + 4$.

§. 186. Erklärung. Das arithmetische Verhältniß bestimmt, um wieviel ein Glied größer, als das andere ist (§. 180, 181.) durch die Differenz. Nun kann es geschehen, daß zwei Paare von Gliedern einerlei Differenzen unter sich haben. So ist z. B. $18 - 12 = 6$, und $20 - 14 = 6$; auch $35 - 29 = 6$ u. s. f. Daher werden zwei arithmetische Verhältnisse einander gleich genennt, wenn sie von der nämlichen Ungleichheit (§. 184.) sind, und einerlei Differenzen haben. Um dieses zu bemerken, setzt man das Zeichen der Gleichheit zwischen die beiden Verhältnisse. So heißt z. B.

$$18 - 12 = 20 - 14$$

soviel, als das arithmetische Verhältniß der Zahlen 18 und 12 ist dasselbige, wie jenes der Zahlen 20 und 14, und man sagt: 18 verhält sich (arithmetisch) so zu 12, wie sich 20 zu 14 verhält. Ein Verhältniß ist größer, als ein anderes, wenn es eine größere, und kleiner als dasselbe, wenn es eine kleinere Differenz, als dieses andere hat. Um es zu bezeichnen, setzt man $>$ (das Zeichen des Größern) oder $<$ (das Zeichen des Kleinern)

zwischen beide Verhältnisse. Daher ist z. B. $15 - 8 > 13 - 10$, d. h. das Verhältniß von 15 zu 8 ist *größer* als das Verhältniß von 13 zu 10, weil $15 - 8 = 7$; $13 - 10 = 3$ und $7 > 3$ ist. Ferner $18 - 14 < 8 - 3$, d. h. das Verhältniß von 18 zu 14 ist *kleiner*, als das Verhältniß von 8 zu 3; denn $18 - 14 = 4$; $8 - 3 = 5$ und $4 < 5$.

§. 187. *Erklärung.* Die Verbindung zweier gleichen arithmetischen Verhältnisse (§. 186.) heißt eine *arithmetische Proportion.* Z. B. $15 - 9 = 13 - 7$, und man sagt: 15 verhält sich so zu 9, wie sich 13 zu 7 verhält; d. h. gleichwie 15 um 6 größer ist als 9, so ist auch 13 um 6 größer als 7. Oder rückwärts: So wie 7 um 6 kleiner ist als 13, so ist auch 9 um 6 kleiner als 15. Oder: $3 - 11 = 7 - 15$. Das erste Glied des ersten, und das letzte des zweiten Verhältnisses sind die *äußern*; das zweite Glied des ersten, und das erste des zweiten Verhältnisses die *innern* oder die *mittlern* Glieder der Proportion.

§. 188. *Grundsätze.* I. In jeder arithmetischen Proportion können nicht mehr und nicht weniger, als vier Glieder seyn. Denn sie besteht aus zwei Verhältnissen (§. 187. u. §. 178.).

II. Auch verhält sich das erste Glied so zu dem zweiten wie sich das dritte Glied zu dem vierten verhält, d. h. um so Vieles das erste Glied größer oder kleiner, als das zweite ist, um eben so Vieles ist auch das dritte Glied größer oder kleiner, als das vierte.

III. Desgleichen verhält sich auch das vierte Glied so zu dem dritten, wie sich das zweite Glied zu dem ersten verhält. In den obigen (§. 187.) Beispielen ist auch umgekehrt: $7 - 13 = 9 - 15$ und $15 - 7 = 11 - 3$.

§. 189. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder so groß, als die Summe aus den beiden innern Gliedern (§. 187.).

Beweis. Da hier drei Fälle möglich sind, so ist auch ein dreifacher Beweis erforderlich.

I. Wenn die gegebene Proportion aus zwei Verhältnissen der Gleichheit (§. 184.) besteht.

Hier ist das erste Glied so groß wie das zweite, und das dritte so groß wie das vierte (§. 184.). Folglich besteht die Summe des ersten und vierten aus den nämlichen Zahlen, woraus die Summe des zweiten und dritten Gliedes zusammengesetzt ist. Demnach sind auch diese Summen gleich. Z. B. $8-8=3-3$. Hier ist offenbar $8+3$, oder die Summe aus den beiden äußern Gliedern, $= 8 + 3$, oder jener der beiden mittlern. Auch in $14 - 14 = 2 - 2$ hat man $14 + 2 = 14 + 2 = 16$.

II. Wenn die Proportion aus Verhältnissen besteht, welche ungleich vom Größern zum Kleinern (§. 184.) sind.

In diesem Falle ist (nach §. 185, IV.) das erste Glied die Summe aus dem zweiten und dem Unterschiede. Desgleichen ist das dritte Glied eine Summe aus dem vierten und dem (nämlichen) Unterschiede. Werden nun, anstatt des ersten und dritten Gliedes, diese ihnen gleiche Summen in die Proportion gesetzt, und nun die Summen aus den äußern und innern Gliedern gebildet, so besteht jede derselben aus dem zweiten und vierten Gliede und aus dem gemeinschaftlichen Unterschiede. Folglich sind diese Summen, da sie die nämlichen Zahlen enthalten, einander gleich (§. 27, III.).

Gesetzt die Proportion sei diese: $12 - 8 = 6 - 2$, so ist, wei hier der gemeinschaftliche Unterschied $= 4$, das erste Glied $12 = 8 + 4$ (§. 185, IV.) und auch das dritte $6 = 2 + 4$ (§. 185, IV.). Folglich wird aus

obiger Proportion nunmehr diese: (8 + 4) — 8 = (2 + 4) — 2. Allein hier ist die Summe der äußern Glieder = 8 + 4 + 2 = 14 = 8 + 2 + 4 der Summe der innern Glieder. Desgleichen ist in 20 — 12 = 14 — 6 auch wieder 20 + 6 = 12 + 14 = 26 u. s. w.

III. Wenn die gegebene Proportion aus Verhältnissen der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern besteht (§. 184).

Hier ist das zweite Glied (nach §. 185, V.) eine Summe aus dem ersten und dem Unterschiede. Ebenso auch das vierte eine Summe aus eben diesem Unterschiede und dem dritten Gliede. Setzt man nun, anstatt dieser Glieder, die ihnen gleichen Summen in die Proportion und bildet nachher in ihr die Summen aus den äußern und innern Gliedern, so müssen dieselben einander gleich seyn, weil sie aus einerlei Zahlen zusammengesetzt sind.

Die Proportion sei diese: 5 — 18 = 9 — 22, so ist hier 13 der gemeinschaftliche Unterschied, und 18 = 5 + 13, auch 22 = 9 + 13. Werden daher, anstatt 18 und 22, diese Werthe in die Proportion gesetzt, so ist sie diese: 5 — (5 + 13) = 9 — (9 + 13), worin die Summe der äußern Glieder = 5 + 9 + 13 = 27 = 5 + 13 + 9 oder der Summe der innern gleich ist. Desgleichen ist auch in 3 — 12 = 5 — 14 ebenso 3 + 14 = 12 + 5 = 17 u. s. f.

Anderer Beweis.

Die gegebene Proportion sei diese:

24 — 17 = 15 — 8,

so kann man bei ihr folgenden Grundsatz anwenden: Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen. Betrachtet man nämlich diese Proportion als zwei gleiche Differenzen, (nach §. 186.) so entsteht nachstehende Rechnung:

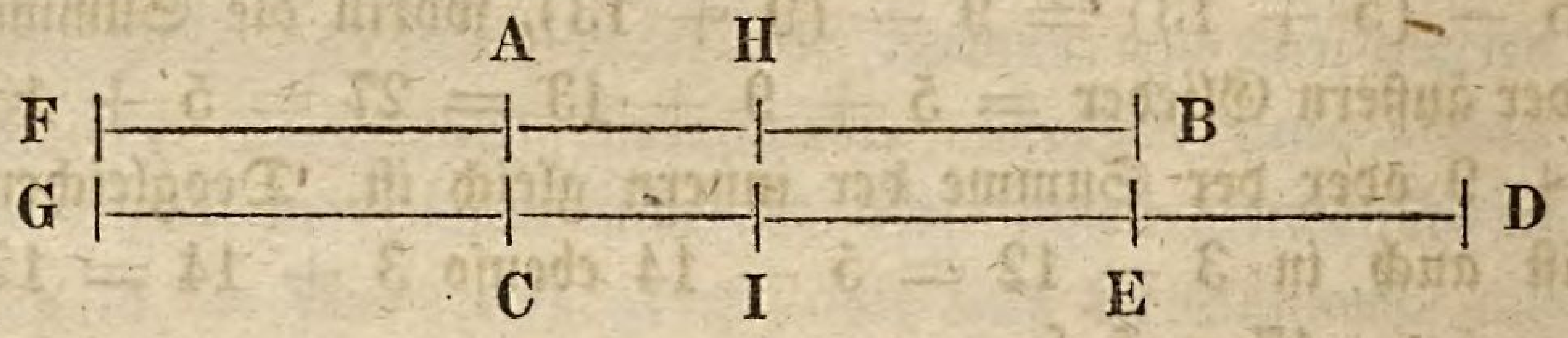
$$\begin{array}{rcll} 24 - 17 & = & 15 - 8 & \\ 17 & = & 17 & \text{beiderseits addirt} \\ \hline 24 & = & 17 + 15 - 8 & \\ 8 & = & 8 & \text{beiderseits addirt} \\ \hline \end{array}$$

gibt $24 + 8 = 17 + 15$, welches der zu beweisende Satz ist.

§. 190. Lehrsatz. Wenn man zu jedem Gliede eines arithmetischen Verhältnisses dieselbige Zahl addirt, oder von jedem Gliede die nämliche Zahl subtrahirt, so bleibt das Verhältniß der Summen oder Differenzen dem zuerst gegebenen Verhältnisse gleich.

Beweis. Der Werth eines arithmetischen Verhältnisses besteht in der Größe des Unterschiedes (§. 186.) seiner Glieder. Da aber irgend zwei Zahlen den nämlichen Unterschied behalten, wenn man einerlei Zahl zu beiden addirt, oder von beiden hinwegnimmt, so bleibt auch das arithmetische Verhältniß jener Zahlen unverändert.

Man kann dieses durch die beiden geraden Linien **AB** und **CD** anschaulich machen, deren



Differenz die Linie **ED** ist. Werden beide um das Stück **AF** = **CG** größer, wodurch jene zu **FB** und diese zu **GD** wird, so haben auch diese wieder den nämlichen Unterschied **ED**. Werden beide am **AH** = **CI** kleiner, so bleibt **HB** und **ID** übrig, bei welchen wiederum die nämliche Differenz **ED** Statt findet.

Anderer Beweis.

In dem Verhältnisse $12 - 7$ ist 5 die Differenz; folglich wird nach **§. 187, IV.**

$$12 = 7 + 5.$$ Wird nun beiderseits z. B. $4 = 4$ addirt, so muß nunmehr $16 = 11 + 5$ und folglich, wenn man $11 = 11$ beiderseits abzieht, auch $16 - 11 = 5$ seyn; d. h. das Verhältniß $16 - 11$ ist dem Verhältnisse $12 - 7$ gleich. — Ebenso wird der Beweis geführt, wenn z. B. 4 von jedem Gliede des ersten Verhältnisses $(12 - 7)$ subtrahirt wird.

Beispiele.

Es sei $12 - 7 = 5$, so ist auch z. B. $(12 + 3) - (7 + 3)$ oder $15 - 10 = 5$. Eben so ist ferner z. B. $(12 - 2) - (7 - 2) = 10 - 5 = 5$. Ferner $20 - 13 = 7$; folglich auch $(20 + 4) - (13 + 4)$ oder $24 - 17 = 7$. Desgleichen $(20 - 4) - (13 - 4)$ oder $16 - 9 = 7$.

§. 191. Zusatz. Daher läßt sich eine gegebene arithmetische Proportion auf sehr vielfache Weise in der Größe ihrer Glieder verändern, ohne daß die Proportionalität d. h. die Differenz dieser Glieder gestört wird; z. B. $24 - 19 = 17 - 12$ wird verwandelt in folgende Proportionen:

$30 - 25 = 15 - 10$, oder $20 - 15 = 23 - 18$, oder $12 - 7 = 18 - 13$ u. s. f.

§. 192. Lehrsatz. In jeder arithmetischen Proportion verhält sich das erste Glied so zum dritten Gliede, wie sich das zweite Glied zum vierten verhält.

Beweis. I. Wenn die Proportion aus Verhältnissen vom Größern zum Kleinern besteht, so ist das erste Glied um eben so viel größer als das zweite Glied, um wieviel das dritte größer als das vierte ist. Daher ist das erste Glied eine Summe aus dem zweiten Gliede und dem

Unterschiede, und das dritte Glied eine Summe aus dem vierten Gliede und demselbigen Unterschiede. Wenn man aber zu jedem Gliede eines arithmetischen Verhältnisses dieselbige Zahl addirt, so bilden diese Summen wiederum das nämliche Verhältniß (§. 190.) Folglich muß auch das Verhältniß vom ersten und dritten Gliede dem Verhältnisse vom zweiten und vierten Gliede gleich seyn.

II. Wenn die Proportion aus Verhältnissen vom Kleinern zum Größern besteht, so hat das Umgekehrte Statt und die Wahrheit des Satzes geht jedesmal aus §. 190. hervor.

Beispiele.

Es sei 18 — 11 = 15 — 8, so ist auch 18 — 15 = 11 — 8. Denn 18 — 11 = (11 + 7) — 11 und 15 — 8 = (8 + 7) — 8. Daher (11 + 7) — (8 + 7) = 11 — 8. Es sei ferner 5 — 12 = 8 — 15, so ist auch 5 — 8 = 12 — 15 u. s. w. Bei dieser Versetzung der Glieder entsteht ein anderer Unterschied in der neuen Proportion, in Bezug auf jenen, der zuvor Statt hatte. Denn es wird hier vorausgesetzt, daß das dritte Glied dem zweiten Gliede ungleich sei. Sind beide Glieder einander gleich, so bleibt auch der Unterschied der nämliche; z. B. 15 — 12 = 12 — 9.

§. 193. Zusatz. I. Daher bleibt auch die Proportion ungestört, wenn man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied einer arithmetischen Proportion um dieselbige Zahl vermehrt oder vermindert. Dieses gibt abermals eine sehr große Menge von Veränderungen der Glieder einer Proportion, wie man durch Beispiele leicht zeigen kann.

II. Erklärung. Man nennt jene zwei Glieder einer arithmetischen Proportion, welche man um dieselbige Zahl vermehren oder vermindern kann, ohne daß die Propor-

tionalität gestört wird, verhältnißmäßige Glieder. Daher gibt es in jeder arithmetischen Proportion vier Paare solcher Glieder; nämlich:

das erste und zweite,
das erste und dritte,
das zweite und vierte, und endlich
das dritte und vierte Glied.

Von unverhältnißmäßigen Gliedern gibt es zwei Paare; nämlich: das erste und vierte, und das zweite und dritte Glied, oder die beiden äußern und die zwei innern Glieder.

§. 194. Zusatz. Wenn zwei gleiche Summen, deren jede aus zwei Zahlen besteht, gegeben sind, so kann man aus diesen vier Zahlen mehrere Proportionen bilden, worin das eine Paar die innern, das andere Paar die äußern Glieder bildet. Da z. B. $12 + 8 = 3 + 17$ ist, so entstehen daraus die acht Proportionen.

1) $12 - 3 = 17 - 8$,
2) $12 - 17 = 3 - 8$,
3) $8 - 3 = 17 - 12$,
4) $8 - 17 = 3 - 12$,
5) $3 - 12 = 8 - 17$,
6) $3 - 8 = 12 - 17$,
7) $17 - 12 = 8 - 3$,
8) $17 - 8 = 12 - 3$.

Denn aus $12 + 8 = 3 + 17$ folgt, wenn man von jeder dieser zwei gleichen Summen die Zahl 3 abzieht, dieses: $12 + 8 - 3 = 17$, und wenn man nun beiderseits die Zahl 8 wegnimmt, nachstehendes: $12 - 3 = 17 - 8$, welches die erste der obigen acht Proportionen ist, woraus die übrigen sehr leicht folgen. Man sieht auch, daß die 1ste, 2te, 5te, 6te die umgekehrte der 4ten, 3ten,

8ten, 7ten ist, und daß somit nur vier wesentlich verschiedene Proportionen gebildet werden können.

§. 195 Zusatz. I. Wenn man die gleichnamigen Glieder mehrerer gegebenen arithmetischen Proportionen zusammen addirt, so bilden diese vier Summen wieder eine arithmetische Proportion; z. B. es sei

$6 - 9 = 7 - 10$ und

$5 - 3 = 8 - 6$, so ist, durch Summirung, $11 - 12 = 15 - 16$.

Denn hier ist $6 + 10 = 9 + 7$ und auch $5 + 6 = 3 + 8$ (§. 189.); folglich $(6 + 5) + (10 + 6) = (9 + 3) + (7 + 8)$, woraus (nach §. 194.) $(6 + 5) - (9 + 3) = (7 + 8) - (10 + 6)$ folgt, welches die neue Proportion ist. Ebendieses gilt auch von mehr als zwei gegebenen Proportionen.

II. Auch geben die Differenzen der gleichnamigen Glieder wieder eine Proportion; z. B. aus

$18 - 10 = 25 - 17$ und

$12 - 5 = 16 - 9$ folgt, durch Abzug, $6 - 5 = 9 - 8$.

III. Auf gleiche Art bilden auch die Gleichvielfachen der vier Glieder wieder eine Proportion; es sei

$10 - 6 = 15 - 11$, und der Multiplicator z. B. $= 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$, so ist auch

$40 - 24 = 60 - 44$ u. s. f.

IV. Ebenso bilden die gleichvielfachen Theile der vier Glieder einer arithmetischen Proportion auch wieder eine solche. Es sei z. B.

$24 - 18 = 36 - 30$, und der Divisor $= 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3$, so ist auch

$8 - 6 = 12 - 10$ u. s. f.

In III. ist der neue Unterschied 4mal größer und in IV. ist er 3mal kleiner als er zuvor gewesen ist.

§. 196. Erklärung. Eine arithmetische stetige Proportion heißt jene, worin das zweite Glied mit dem dritten das nämliche ist. Z. B. $12 - 8 = 8 - 4$; oder $5 - 14 = 14 - 23$; und man sagt, das zweite oder dritte Glied sei die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden äußern Gliedern. Um soviel nämlich das erste Glied größer oder kleiner als das zweite ist, um ebensoviel ist dieses zweite Glied (als drittes) größer oder kleiner als das vierte.

§. 197. Zusatz. I. In der stetigen Proportion (§. 196.) ist eigentlich nur ein mittleres Glied gegeben, welches die Stelle der beiden innern vertritt.

II. Bei dieser stetigen Proportion ist die Summe der äußern Glieder so groß, als das mittlere doppelt (§. 189.). Z. B. in $12 - 7 = 7 - 2$ ist $12 + 2 = 7 + 7 = 2 \times 7 = 14$. Ferner in $24 - 21 = 21 - 18$ hat man $24 + 18 = 21 + 21 = 2 \times 21 = 42$.

§. 198. Erklärung. Zu drei gegebenen Zahlen eine vierte arithmetische Proportionalzahl finden, heißt, diese drei Zahlen (in einer gegebenen Ordnung) als Glieder einer arithmetischen Proportion ansehen und hieraus die Größe des fehlenden Gliedes (dessen Stelle in der Proportion angegeben seyn muß) bestimmen.

§. 199. Aufgabe. Zu drei gegebenen Zahlen eine vierte arithmetische Proportionalzahl (§. 198.) zu finden.

Auflösung. I. Wenn die zu findende Zahl, als Glied der Proportion, ein äußeres ist, so mache man eine Summe aus den beiden mittlern Gliedern und ziehe hievon das vorhandene äußere ab, so ist der Unterschied das zu findende äußere Glied.

II. Ist hingegen die gesuchte Zahl, als Glied der Proportion, ein mittleres, so verfahre man gerade umgekehrt, summire die vorhandenen äußern Glieder, und nehme davon das eine mittlere hinweg, so ist die Differenz die zu findende Proportionalzahl.

Beweis. Die Summe der äußern Glieder ist so groß als die Summe aus den beiden mittlern (§. 189.). Wenn daher eine dieser Summen, und nebst ihr noch eine Zahl gegeben ist, welche mit einer zu findenden eben diese Summe ausmachen soll, so wird diese zu findende Zahl herauskommen müssen, wenn man von der bekannten Summe die angegebene Zahl hinwegnimmt (§. 33, IV.). Man erhält folglich durch die Anweisung von I. und II. das zu findende vierte Glied.

Beispiele. Zu I. Die drei gegebenen Zahlen, als das erste, zweite und dritte Glied der Proportion, seien 12, 8 und 7; man sucht das vierte Proportionalglied, welches, um seine Stelle in der Proportion zu bemerken, mit x bezeichnet werden kann. Hier ist also

$12 - 8 = 7 - x$, folglich $x = 8 + 7 - 12 = 15 - 12 = 3$. Daher ist die ganze Proportion: $12 - 8 = 7 - 3$. Ferner in $5 - 16 = 7 - x$ ist wieder $x = 16 + 7 - 5 = 23 - 5 = 18$, woraus die Proportion $5 - 16 = 7 - 18$ wird. Desgleichen in $x - 4 = 17 - 9$, ist wieder $x = 4 + 17 - 9 = 21 - 9 = 12$, und man hat auch $12 - 4 = 17 - 9$.

Zu II. Wenn $19 - x = 14 - 10$, so ist $x = 19 + 10 - 14 = 29 - 14 = 15$, und: $19 - 15 = 14 - 10$. Desgleichen ist in $18 - 7 = x - 23$, $x = 18 + 23 - 7 = 41 - 7 = 34$, und: $18 - 7 = 34 - 23$.

§. 200. Zusatz. I. Um zu zwei gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl (§. 196.) zu finden,

nehme man die Hälfte der Summe von diesen zwei Zahlen, als den beiden äußern Gliedern (§. 197, II. §. 199), so ist diese das verlangte mittlere Glied. Das erste Glied sei 8, das vierte 32, das mittlere x, so ist $8 - x = x - 32$, folglich $2x = 8 + 32$, und $x = \frac{8+32}{2} = \frac{40}{2} = 20$. Daher wird 20 die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen 8 und 32 seyn, und es ist: $8 - 20 = 20 - 32$. Ferner zwischen 17 und 4 ist das mittlere Glied $\frac{17+4}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, und die Proportion ist nun diese: $17 - 10\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2} - 4$, wo in beiden Verhältnissen der gemeinschaftliche Unterschied $= 6\frac{1}{2}$ ist.

II. Diese Aufgaben (§. 199. u. 200.) können auch in Decimalbrüchen und in gemeinen Brüchen aufgelöset werden, wozu folgende Beispiele dienen:

1) In $0{,}827 - 0{,}45 = 3{,}9 - x$ wird $x = 0{,}45 + 3{,}9 - 0{,}827 = 4{,}35 - 0{,}827 = 3{,}523$. Der Unterschied ist $0{,}827 - 0{,}45 = 0{,}377 = 3{,}9 - 3{,}523$.

2) In $4{,}038 - x = x - 3{,}47$ wird $x = \frac{4{,}038 + 3{,}47}{2} = \frac{7{,}508}{2} = 3{,}754$.

3) In $\frac{3}{4} - \frac{4}{9} = \frac{7}{11} - x$ wird $x = \frac{4}{9} + \frac{7}{11} - \frac{3}{4} = \frac{131}{396}$.

4) In $\frac{5}{7} - x = x - \frac{11}{15}$ wird $x = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7} + \frac{11}{15}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{152}{105}\right) = \frac{76}{105}$.

5) In $\frac{5}{8} - 0{,}003 = 6{,}07 - x$ wird $x = 6{,}073 - \frac{5}{8} = 6{,}073 - 0{,}625 = 5{,}448$ u. s. f.

§. 201. Grundsätze für das geometrische Verhältniß.

I. In dem Verhältnisse der Gleichheit (§. 184.) ist der Exponent = 1.

II. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Größern zum Kleinern (§. 184.) ist der Exponent eine ganze Zahl, und bisweilen auch eine ganze Zahl nebst einem ächten Bruche. Z. B. 24 : 3 = 8; 37 : 5 = $7\frac{2}{5}$.

III. In dem Verhältnisse der Ungleichheit vom Kleinern zum Größern (§. 184.) ist der Exponent ein eigentlicher Bruch (§. 122, II.). Z. B. 7 : 15 = $\frac{7}{15}$. Oder 12 : 48 = $\frac{12}{48}$ = $\frac{1}{4}$.

IV. In beiden Fällen (von II. und III.) ist jedesmal das erste Glied ein Product aus dem zweiten in den Exponenten (§. 36. II.). So ist in II. 24 = 8 × 3. Auch 37 = 5 × $7\frac{2}{5}$. Und in III. 7 = 15 × $\frac{7}{15}$. Ferner 12 = 48 × $\frac{1}{4}$.

V. In II. und III. ist immer das zweite Glied der Quotient aus dem ersten als Dividend, und aus dem Exponenten als Divisor (§. 36. III.). Z B. in II. ist 3 = 24 : 8; 5 = 37 : $7\frac{2}{5}$. Auch in III. ist 15 = 7 : $\frac{7}{15}$ und 48 = 12 : $\frac{12}{48}$.

§. 202. Erklärung. Das geometrische Verhältniß bestimmt, wie vielmal das erste Glied größer, als das zweite ist (§. 182.), durch den Exponenten des Verhältnisses. Nun kann bei zwei Paaren von Gliedern dieser Exponent der nämliche seyn. Denn es ist z. B. 32 : 4 = 8, und 48 : 6 = 8. Daher werden zwei geometrische Verhältnisse einander gleich genennt, wenn sie einerlei Exponenten haben. Um diese Gleichheit der Verhältnisse anzuzeigen, setzt man das Gleichheitszeichen zwischen beide. So heißt z. B. 32 : 4 = 48 : 6 so viel, als: das geometrische Verhältniß der Zahlen 32 und 4 ist eben so groß, als jenes der Zahlen 48 und 6. Oder: Gleichwie 32 achtmal größer, als 4 ist, so ist auch 48 achtmal größer, als 6. — Oder auch (rückwärts gelesen): so wie 6 achtmal

kleiner, als 48 ist, so ist 4 achtmal kleiner, als 32. Auch wird ein Verhältniß größer, als ein anderes genennt, wenn es einen größern, und kleiner, wenn es einen kleinern Exponenten als dieses letztere hat. Diese Ungleichheit bezeichnet man durch die Zeichen des Größern und Kleinern (in §. 186.). So ist z. B. 56 : 7 > 30 : 6; denn im ersten Verhältnisse ist 8, im zweiten 5 (<8) der Exponent. Auch ist 48 : 8 < 72 : 9, weil dort 6 und hier 8 (> 6) der Verhältnißname ist.

§. 203. Erklärung. Eine Verbindung von zwei gleichen geometrischen Verhältnissen (§. 202.) wird eine geometrische Proportion genennt. Z. B. 24 : 6 = 16 : 4, oder 8 : 56 = 3 : 21. Das erste Glied des ersten und das zweite Glied des letzten Verhältnisses heißen die äußern; die beiden andern hingegen die innern oder mittlern Glieder der Proportion.

§. 204. Grundsätze. I. Die geometrische Proportion besteht nur aus vier Gliedern. Denn sie ist aus zwei Verhältnissen zusammengesetzt.

II. Das erste Glied hat das nämliche Verhältniß zum zweiten Gliede, wie das dritte zum vierten, d. h. so vielmal das erste Glied größer oder kleiner als das zweite ist, so vielmal ist auch das dritte Glied größer oder kleiner als das vierte. — Ebenso hat auch das vierte Glied das nämliche Verhältniß zum dritten, welches das zweite zum ersten Gliede hat.

§. 205. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus den äußern Gliedern (§. 204.) dem Producte aus den mittlern gleich.

Beweis. I. Wenn die Proportion aus zwei Verhältnissen der Gleichheit (§. 184.) besteht.

In diesem Falle werden die Producte aus den beiden äußern und innern Gliedern aus einerlei Factoren zusam-

mengesetzt, und müssen daher nothwendig einander gleich seyn. Z. B. $8 : 8 = 25 : 25$, wo offenbar $8 \times 25 = 8 \times 25 = 200$. Desgleichen in $37 : 37 = 5 : 5$ ist $37 \times 5 = 37 \times 5 = 185$.

II. Wenn die beiden Verhältnisse von der nämlichen Ungleichheit (§. 184.) sind.

Hier ist immer (nach §. 201, IV.) das erste Glied eines jeden der beiden Verhältnisse ein Product aus dem zweiten Gliede in den Exponenten. Daher kann man auch anstatt jener beiden ersten Glieder diese zwei ihnen gleichen Producte in die gegebene Proportion setzen. Es entsteht hierdurch eine neue Proportion, worin die Producte aus dem ersten Gliede in den Exponenten, und aus dem dritten in eben diesen Exponenten, das erste und dritte Glied; das zweite und vierte hingegen die nämlichen Glieder, wie zuvor auch sind. Macht man nun in dieser Proportion die verlangten Producte aus den beiden äußern und aus den zwei innern Gliedern, so besteht jedes derselben aus **drei** Factoren, welche das zweite Glied, der Exponent und das vierte Glied sind. Folglich müssen die Producte einander gleich seyn (§. 30, IV.).

So ist z. B. in $36 : 9 = 28 : 7$, die $36 = 9 \times 4$, und $28 = 7 \times 4$ (§. 201, VI.). Daher wird diese Proportion in nachstehende verwandelt: $9 \times 4 : 9 = 7 \times 4 : 7$, in welcher die Producte $9 \times 4 \times 7$ und $9 \times 7 \times 4$ gleich seyn müssen, weil sie einerlei Factoren enthalten (§. 30, IV.). Desgleichen ist in $5 : 45 = 8 : 72$ (nach §. 201. IV.) $5 = 45 \times \frac{5}{45}$ und $8 = 72 \times \frac{8}{72}$; oder weil $\frac{5}{45} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$, so ist auch $5 = 45 \times \frac{1}{9}$, und $8 = 72 \times \frac{1}{9}$. Folglich hat man $45 \times \frac{1}{9} : 45 = 72 \times \frac{1}{9} : 72$, welches $45 \times \frac{1}{9} \times 72 = 45 \times 72 \times \frac{1}{9}$ gibt, weil wieder einerlei Factoren einerlei Factum hervorbringen.

Anderer Beweis.

Die gegebene Proportion sei diese: 24 : 8 = 39 : 13, so ist $\frac{24}{8} = \frac{39}{13}$, denn gleiche Quotienten geben gleiche Brüche; folglich wird auch $\frac{24 \times 13}{8 \times 13} = \frac{39 \times 8}{13 \times 8}$. Wenn aber gleiche Brüche gleiche Nenner haben, so sind auch ihre Zähler gleich. Daher ist 24 × 13 = 39 × 8. Dieser Beweis kann bei jeder andern geometrischen Proportion ebenso geführt werden, und ist demnach allgemein.

§. 206. Erklärung. Eine stetige geometrische Proportion ist diejenige, in welcher die beiden mittlern Glieder einander gleich sind; z. B. 64 : 8 = 8 : 1; oder 4 : 6 = 6 : 9, und man sagt, eines der innern Glieder sei die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen den beiden äußern. So ist, in den obigen Beispielen, 8 die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 64 und 1; ferner 6 jene zwischen 4 und 9.

§. 207. Zusatz. I. In der stetigen geometrischen Proportion (§. 206.) ist daher nur ein mittleres Glied vorhanden, welches aber zweimal vorkommt.

II. Auch ist das Product der beiden äußern Glieder einem Producte aus dem mittlern in sich selbst gleich. Da man das Product einer Zahl in sich selbst das Quadrat dieser Zahl nennt, so kann man auch sagen: das Product der äußern Glieder ist dem Quadrate des mittlern gleich. In der Proportion 36 : 12 = 12 : 4 ist 36 × 4 = 12 × 12 = 144, und 144 wird das Quadrat von 12 genennt. Diese Benennung erklärt die Geometrie. Denn wenn z. B. die gemessene Seite eines Quadrats genau 12 Längenfuß enthielte, so würde der Flächeninhalt dieses Quadrates 144 Quadratfuß betragen.

§. 208. Lehrsatz. Wenn man die beiden Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit der nämlichen dritten

Zahl multiplicirt oder dividirt, so ist das Verhältniß der Producte oder Quotienten dem gegebenen Verhältnisse gleich.

Beweis. Der Werth eines geometrischen Verhältnisses wird durch den Exponenten bestimmt (§. 202.). Dieser wird aber gefunden, indem das erste Glied durch das zweite dividirt wird (§. 182.). Ein jeder Quotient ist aber nichts anders, als ein Bruch, dessen Zähler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist (§. 122, II.). Daher läßt sich jedes geometrische Verhältniß durch einen Bruch ausdrücken, dessen Zähler das erste Glied und dessen Nenner das zweite Glied des Verhältnisses ist; (wie im zweiten Beweise von §. 205.). Allein der Werth eines Bruchs wird (nach §. 127. und 132.) nicht verändert, indem man seinen Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt. Folglich bleibt auch das Verhältniß auf diese Art das nämliche. Man kann hierdurch ein gegebenes Verhältniß auf sehr mannigfache Art durch andere Zahlen ausdrücken.

Beispiele.

$64 : 8 = 8$. Daher auch $\frac{64}{4} : \frac{8}{4} = 8$, oder $16 : 2 = 8$. Denn $64 : 8 = \frac{64}{8} = \frac{64:4}{8:4} = \frac{16}{2} = 16 : 2$. Ferner $36 : 9 = \frac{36}{3} : \frac{9}{3} = 12 : 3$. Denn $36 : 9 = \frac{36}{9}$; folglich $36 : 9 = \frac{36:3}{9:3} = \frac{12}{3} = 12 : 3$. Desgleichen ist $7 : 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$, und $7 \times 2 : 3 \times 2 = 14 : 6 = \frac{14}{6} = 2\frac{2}{6} = 2\frac{1}{3}$. Denn $7 : 3 = \frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$.

§. 209. Erklärung. Dieses Verfahren (in §. 208.), wodurch beide Glieder eines Verhältnisses mit der nämlichen dritten Zahl so dividirt werden, daß kein Rest bleibt, heißt man: das Verhältniß heben.

§. 210. Anmerkung. I. Da man durch das Heben eines Verhältnisses (§. 209.) aus dem gegebenen ein anderes findet, welches demselben am Werthe gleich und nur durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist, so erleichtert dieses Verfahren die Rechnung. Auch kann man eine gegebene Proportion, durch Aufheben der beiden Verhältnisse, auf die kleinsten Zahlen bringen, welches in der wirklichen Rechnung, wie die Folge lehren wird, manchen Vortheil gewährt. Z. B. in $15 : 3 = 35 : 7$ ist $\frac{15}{3} : \frac{3}{3} = 35 : 7$, oder $5 : 1 = 35 : 7 = \frac{35}{7} : \frac{7}{7} = 5 : 1$. Ferner ist $1600 : 80 = 140000 : 7000$ soviel als $160 : 8 = 140 : 7 = 20 : 1$.

II. Alles, was oben (§. 137. bis 140.) für die Brüche bemerkt worden ist, kann nun hier auf das Heben der Verhältnisse angewendet werden.

§. 211. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich auch das erste Glied so zu dem dritten, wie sich das zweite zu dem vierten verhält.

Beweis. Weil (nach §. 201, IV.) das erste Glied ein Product aus dem zweiten und dem Exponenten, und das dritte Glied ein Factum aus dem vierten und dem nämlichen Exponenten ist, so ist in jeder Proportion das erste und dritte Glied nichts anders, als das zweite und vierte, welche mit einerlei dritten Zahl, dem Exponenten, multiplicirt sind. Nun ist aber das Verhältniß zweier Zahlen, welche mit der nämlichen dritten multiplicirt sind, dem Verhältnisse der unmultiplicirten Zahlen selbst gleich (§. 208.). Folglich verhält sich auch das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten.

Anderer Beweis.

Die Proportion sei folgende:

$$24 : 8 = 39 : 13,$$ so ist

$$24 \times 13 = 8 \times 39$$ (§. 205.) folglich auch, wenn beiderseits mit 39 dividirt wird, $\frac{24 \times 13}{39} = 8$, und, zu beiden Seiten durch 13 dividirt, gibt

$$\frac{24}{39} = \frac{8}{13},$$ woraus (nach §. 122, II.) die Proportion $24 : 39 = 8 : 13$ hervorgeht.

Beispiele.

Es sei 24 : 8 = 27 : 9, so ist auch 24 : 27 = 8 : 9. Denn aus der ersten Proportion folgt 8 × 3 : 8 = 9 × 3 : 9. Allein 8 × 3 : 9 × 3 = 8 : 9 (§. 208.) Daher auch 24 : 27 = 8 : 9. Ferner in 5 : 20 = 8 : 32, ist auch 5 : 8 = 20 : 32. Denn 5 = 20 × $\frac{1}{4}$ und 8 = 32 × $\frac{1}{4}$; folglich, weil $\frac{5}{20} = \frac{8}{32}$, auch 20 × $\frac{1}{4}$: 20 = 32 × $\frac{1}{4}$: 32, und endlich 20 × $\frac{1}{4}$: 32 × $\frac{1}{4}$ = 20 : 32, d. h. 5 : 8 = 20 : 32. — Es ist übrigens für sich selbst einleuchtend, daß bei dieser Versetzung der Glieder auch die Exponenten verändert werden. Denn in der Proportion 24 : 8 = 27 : 9 war der Exponent = 3, und in der Proportion 24 : 27 = 8 : 9 ist er $\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$.

§. 212. Zusatz. I. Wenn sich daher das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied einer gegebenen geometrischen Proportion mit einer gemeinschaftlichen dritten Zahl ohne Rest aufdividiren lassen, so kann man auch dadurch das Verhältniß dieser Glieder heben (§. 209.) d. h. die Proportion selbst in kleinern Zahlen ausdrücken. So ist z. B. in 6 : 18 = 9 : 27 auch $\frac{6}{3}$: 18 = $\frac{9}{3}$: 27 oder 2 : 18 = 3 : 27. Ferner in 3 : 24 = 5 : 40 ist auch 3 : $\frac{24}{4}$ = 5 : $\frac{40}{4}$, oder 3 : 6 = 5 : 10.

II. Auch kann man das erste und dritte, oder das zweite und vierte Glied einer Proportion mit der nämlichen dritten Zahl multipliciren, ohne die Gleichheit der beiden Verhältnisse zu stören. Z. B. in 4 : 20 = 3 : 15 ist auch 4 × 3 : 20 = 3 × 3 : 15, d. h. 12 : 20 = 9 : 15. Oder in 18 : 6 = 21 : 7 hat man auch 18 : 6 × 2 = 21 : 7 × 2, d. h. 18 : 12 = 21 : 14.

III. Was daher oben (§. 193, II.) von verhältnißmäßigen und unverhältnißmäßigen Gliedern der

arithmetischen Proportion gesagt worden ist, findet auch hier wieder auf ähnliche Weise seine Anwendung.

§. 213. Zusatz. Hat der Fall Statt, daß ein Proportionsglied ein Bruch ist, so kann man dasselbige in eine ganze Zahl verwandeln, indem man mit seinem Nenner ein anderes Glied der Proportion, welches mit ihm verhältnißmäßig ist (§. 212. II.), multiplicirt. Denn hierdurch sind beide Glieder mit einerlei dritten Zahl multiplicirt worden, indem ein Bruch mit seinem Nenner muliplicirt wird, wenn man den Zähler desselben allein setzt (§. 122, I.). Z. B. $6 : \frac{3}{4} = 32 : 4$. Hier ist $4 \times 6 : 3 = 32 : 4$, d. h. $24 : 3 = 32 : 4$. Oder auch $6 : 3 = 32 : 4 \times 4$, d. h. $6 : 3 = 32 : 16$.

§. 214. Zusatz. I. Sind mehrere Glieder einer Proportion gebrochene Zahlen, so bringe man das Verfahren von §. 213. so oft an, bis man die Nenner aller Brüche hinweggeschafft und diese hierdurch in ganze Zahlen verwandelt hat. Es sei z. B. $\frac{3}{4} : \frac{12}{17} = \frac{4}{5} : \frac{192}{255}$, so ist $3 : \frac{4 \times 12}{17} = 4 : \frac{5 \times 192}{255}$, oder $3 \times 17 : 4 \times 12 = 4 \times 255 : 5 \times 192$, d. h. $51 : 48 = 1020 : 960 = 102 : 96$, wo denn die Richtigkeit dieser letztern Proportion schon für sich selbst einleuchtet.

II. Hätte hingegen der Fall Statt, daß zwei Glieder welche verhältnißmäßig sind, Brüche von einerlei Nenner wären, so könnte man diese Nenner hinweglassen, und die Zähler allein als Proportionsglieder setzen. So gibt z. B. $8 : \frac{6}{4} = 4 : \frac{3}{4}$ so viel als $8 : 6 = 4 : 3$ u. s. w.

§. 215. Lehrsatz. Wenn man in zwei Proportionen die ersten, zweiten, dritten und vierten Glieder mit einander multiplicirt, so bilden die hieraus entstehenden Producte (in der nämlichen Ordnung) wieder eine Proportion.

Beweis. Nach §. 203. geben die beiden Proportionen vier Verhältnisse, wovon jene zwei, welche in einerlei Proportion stehen, einander gleich sind. Gleiche Verhältnisse geben aber (nach §. 202.) gleiche Exponenten, d. h. gleiche Quotienten (§. 182.) und folglich auch gleiche Brüche (§. 122, II.). Daher werden die beiden ersten Verhältnisse der zwei gegebenen Proportionen, als Brüche betrachtet, wenn sie mit einander multiplicirt werden, ein Product bilden, welches so groß seyn muß, als das Factum aus den beiden andern Verhältnissen, wenn dieselbe auch als Brüche angesehen werden, indem Gleiches mit Gleichem multiplicirt, auch gleiche Producte gibt. Nun geben aber die auf solche Art entstandenen beiden Brüche zwei gleiche Quotienten (§. 122, I.); folglich auch (nach §. 202.) zwei gleiche Verhältnisse, d. h. eine Proportion. — Die gegebenen Proportionen seien z. B. $6 : 18 = 7 : 21$ und $4 : 5 = 20 : 25$, so ist auch $6 \times 4 : 18 \times 5 = 7 \times 20 : 21 \times 25$. Denn aus der ersten Proportion ist $\frac{6}{18} = \frac{7}{21}$ und die zweite gibt $\frac{4}{5} = \frac{20}{25}$; folglich ist auch $\frac{6}{18} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{21} \times \frac{20}{25}$ oder $\frac{6 \times 4}{18 \times 5} = \frac{7 \times 20}{21 \times 25}$. Daher $6 \times 4 : 18 \times 5 = 7 \times 20 : 21 \times 25$; d. h. $24 : 90 = 140 : 525$, worin $\frac{24}{90} = \frac{140}{525} = \frac{4}{15}$ ist.

Da sich dieser Beweis nicht blos auf den Fall beschränkt, wo nur zwei Proportionen gegeben sind, sondern vielmehr aus demselben erhellet, daß er sich auf jede Anzahl von gegebenen Proportionen ausdehnen läßt, so ist ersichtlich, daß die Behauptung des Lehrsatzes ganz allgemein ist.

Auch folgt hieraus, daß der Exponent der beiden Verhältnisse, woraus die neue Proportion besteht, dem Producte aus den Exponenten der gegebenen Verhältnisse gleich sei. So war in dem Verhältnisse 6 : 18 der Expo-

ponent $= \frac{6}{18} : \frac{1}{3}$ und in dem Verhältnisse 4 : 5 wird derselbe $= \frac{4}{5}$. In dem neu entstandenen Verhältnisse ist er $\frac{24}{90} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.

§. 216. Erklärung. Proportionen, welche (nach §. 215.) durch Multiplication der gleichnamigen Glieder mehrerer gegebenen entstanden sind, heißt man zusammengesetzte Proportionen. Daher können solche zusammengesetzte Proportionen aus zwei, drei, vier und mehreren gegebenen Proportionen gebildet werden.

§. 217. Zusatz. I. Wenn zwei Producte, deren jedes aus zwei Factoren besteht, einander gleich sind, so lassen sich aus ihnen acht geometrische Proportionen bilden, worin die Factoren des einen Products die inneren, die Factoren des andern Products die äußeren Glieder sind. Aus $6 \times 4 = 12 \times 3$ folgen die Proportionen:

1) $9 : 12 = 3 : 4$,
2) $9 : 3 = 12 : 4$,
3) $12 : 9 = 4 : 3$ und
4) $12 : 4 = 9 : 3$,
5) $4 : 12 = 3 : 9$,
6) $4 : 3 = 12 : 9$,
7) $3 : 9 = 4 : 12$, endlich
8) $3 : 4 = 9 : 12$.

Denn, da $9 \times 4 = 12 \times 3$, so ist auch, wenn man beiderseits mit 12 dividirt, $\frac{9 \times 4}{12} = 3$, und, wenn man nun beiderseits auch mit 4 dividirt, so wird $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, woraus die Proportion $9 : 12 = 3 : 4$ (§. 202.) entsteht, aus welcher alle übrigen nach den bisherigen Vordersätzen sehr leicht abgeleitet werden können. Uebrigens erkennt man sogleich, daß die 6te Proportion von der 1sten; die 5te von der 2ten; die 8te von der 3ten und die 7te von der 4ten die umgekehrte ist. Es gibt so-

mit im Ganzen nur vier wesentlich verschiedene Proportionen.

II. Auch geht hieraus hervor, daß jedesmal eine geometrische Proportion entsteht, wenn nur die zwei Factoren des einen Productes als die äußern und die beiden Factoren des andern Products als die innern Glieder, gleichviel in welcher Ordnung, gesetzt werden.

§. 218. Aufgabe. Zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion die vierte geometrische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. I. Wenn das zu findende Glied eines der äußern ist.

Hier dividire man das Product der beiden mittlern Glieder durch das vorhandene äußere, so gibt der Quotient das fehlende äußere Glied.

II. Wenn das zu suchende Glied ein mittleres ist.

Nun multiplicire man die beiden äußern Glieder mit einander, und dividire dieses Factum durch das gegebene mittlere Glied, so gibt der Quotient das zu suchende mittlere.

Beweis. In jeder geometrischen Proportion ist das Product aus den beiden äußern Gliedern so groß, als ein Product der innern Glieder (§. 205.). In den beiden Fällen der Auflösung ist nun jedesmal eines dieser Producte gegeben und nebst diesem noch ein Factor, welcher, mit einem zu findenden multiplicirt, eben dieses Factum hervorbringen wird. Nun bekommt man aber, durch die Division des Productes mit dem einen Factor, zum Quotienten den andern (nach §. 36, IV.), welcher hier zugleich das fehlende Glied in der Proportion ist. Folglich ist die gegebene Auflösung richtig.

Beispiele.

Für I. In $7 : 35 = 10 : x$ soll x das fehlende Glied bedeuten, so ist (nach §. 205.) $7 \times x = 35 \times 10 = 350$;

folglich $x = \frac{350}{7} = 50$ (§. 36. IV.); und die Proportion ist diese: $7 : 35 = 10 : 50$, worin der Exponent $= \frac{7}{35} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ ist. — Wäre das zu suchende Glied das erste und die Proportion z. B. folgende: $x : 12 = 9 : 144$, so ist wieder $x \times 144 = 12 \times 9 = 108$, folglich $x = \frac{108}{144} = \frac{3}{4}$, und die ganze Proportion wird diese: $\frac{3}{4} : 12 = 9 : 144$.

Für II. Die Proportion sei: $9 : x = 12 : 140$, wo wieder x das fehlende Glied bedeutet, so ist $x \times 12 = 9 \times 140 = 1260$ (§. 205.); daher auch $x = \frac{1260}{12}$ (§. 36, IV.) $= 105$, und die Proportion: $9 : 105 = 12 : 140$. — Fehlte das andere mittlere Glied, wie z. B. in $18 : 7 = x : 39$, so ist wieder $7 \times x = 18 \times 39 = 702$, und $x = \frac{702}{7} = 100\frac{2}{7}$. Folglich ist die Proportion: $18 : 7 = 100\frac{2}{7} : 39$.

§. 219. Lehrsatz. In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz aus dem ersten und zweiten Gliede so zu dem ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder die Differenz aus dem dritten und vierten Gliede sich zum dritten oder vierten Gliede verhält.

Beweis. Zur größern Erläuterung soll dieser Beweis an einem Zahlenbeispiele durchgeführt werden, welches demselben, da er auf jedes andere Beispiel anwendbar ist, nichts an seiner Allgemeinheit benimmt. Es sei z. B. die Proportion diese:

$12 : 3 = 24 : 6$, worin der Exponent $= 4$ ist, so wird
$3 \times 4 : 3 = 6 \times 4 : 6$ (§. 201., IV.) und
$3 \times 4 : 6 \times 4 = 3 : 6$ (§. 211.), oder auch
$4 \times 3 : 4 \times 6 = 3 : 6$, daher auch
$5 \times 3 : 5 \times 6 = 3 : 6$ (§. 208.), oder
$12 + 3 : 24 + 6 = 3 : 6$, d. h.
$12 + 3 : 3 = 24 + 6 : 6$. (§. 211.) Daher ver-

hält sich die Summe vom ersten und zweiten Gliede so zum zweiten Gliede, wie die Summe aus dem dritten und vierten Gliede sich zum vierten verhält.

Ebenso folgt aus obiger Proportion: $12 : 3 = 24 : 6$ auch diese: $12 + 3 : 12 = 24 + 6 : 24$. Denn die gegebene Proportion wird folgende:

$3 \times 4 : 3 = 6 \times 4 : 6$, daher auch
$3 \times 4 : 3 \times 4 = 6 \times 4 : 6 \times 4$, folglich
$4 \times 3 : 4 \times 3 = 4 \times 6 : 4 \times 6$, oder auch
$5 \times 3 : 4 \times 3 = 5 \times 6 : 4 \times 6$, d. h.
$15 : 12 = 30 : 24$. Oder es verhält sich die Summe vom ersten und zweiten Gliede so zum ersten, wie sich die Summe vom dritten und vierten Gliede zum dritten verhält.

Auf ähnliche Art beweiset man, daß ebenso $12 - 3 : 3 = 24 - 6 : 6$; so wie auch $12 - 3 : 12 = 24 - 6 : 24$ ist. — Jene Proportion heißt:

$9 : 3 = 18 : 6$ und diese ist:
$9 : 12 = 18 : 24$.

§. 220. Zusatz. I. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, daß sich in jeder geometrischen Proportion die Summe oder Differenz aus dem ersten und dritten Gliede so zu dem ersten oder dritten verhält, wie sich die Summe oder Differenz aus dem zweiten und vierten Gliede zu dem zweiten oder vierten verhält. Es sei z. B.

$24 : 8 = 12 : 4$ so ist
$24 + 12 : 24 = 8 + 4 : 8$, oder
$24 - 12 : 24 = 8 - 4 : 8$, oder
$24 + 12 : 12 = 8 + 4 : 4$, oder
$24 - 12 : 12 = 8 - 4 : 4$ u. s. w.

II. Auch ergibt sich sehr einfach die Richtigkeit nachstehender Proportionen, als Folge aus zwei gegebenen:

1) Aus 12 : 8 = 15 : 10 und
8 : 4 = 10 : 5 folgt

12 : 4 = 15 : 5 (§. 208.).

2) Aus 20 : 24 = 40 : 48 und
5 : 20 = 10 : 40 folgt

5 : 24 = 10 : 48 (§. 208.).

§. 221. Aufgabe. Wenn in einer Proportion die drei ersten Glieder, wozu das vierte gesucht werden soll, angegeben und nebst dem noch mehrere Verhältnisse vorhanden sind; so, daß jenes gefundene vierte Glied im ersten dieser gegebenen Verhältnisse das dritte wird, wozu man ein neues vierte sucht, welches in dem folgenden Verhältnisse wieder ein drittes Glied zu einem zu findenden vierten ist, u. s. w. dasjenige Glied zu finden, welches in der letzten Proportion das vierte ist.

Auflösung. Man schreibe alle angegebene Verhältnisse unter das erste Verhältniß der Proportion, mache ein Product aus allen ersten und aus allen zweiten Gliedern, multiplicire dieses letztere mit dem dritten Gliede der Proportion, und dividire nun dieses Factum durch das Product aller ersten Glieder, so ist der Quotient das zu findende letzte Glied.

Beweis. Das vierte Glied der ersten Proportion ist ein Product aus den mittlern Gliedern dividirt durch das erste (218, I.). Dieser Quotient kommt nun als drittes Glied in die folgende Proportion, wozu das vierte wieder gefunden wird, wenn man ihn mit einem Bruche multiplicirt, dessen Zähler das zweite und dessen Nenner das erste Glied des gegebenen Verhältnisses ist. Dieses Factum ist folglich auch ein Bruch, dessen Zähler ein Product aus den beiden mittlern Gliedern der Proportion

und dem zweiten Gliede des ersten Verhältnisses; dessen Nenner hingegen ein Factum aus dem ersten Gliede der Proportion und dem ersten Gliede dieses Verhältnisses ist. Dieser Bruch kommt nun wieder als drittes Glied zur folgenden Proportion, und es erhellet wieder, daß das vierte Glied dazu ein Bruch sei, dessen Zähler ein Product aller zweiten Glieder der ersten Verhältnisse in das zuerst gegebene dritte, und dessen Nenner ein Factum aus allen ersten Gliedern der Verhältnisse ist. Da man diesen Beweis, für den Fall, wo noch mehrere Verhältnisse gegeben sind, weiter fortsetzen kann, so ergibt sich hieraus die allgemeine Richtigkeit der obigen Auflösung.

Erläuterung dieses Beweises.

Die gegebene Proportion sei:

$3 : 15 = 8 : x$, und die Verhältnisse seien:

$5 : 9 = - : -$

$6 : 10 = - : -$, so ist zuerst $x = \frac{15 \times 8}{3}$ (§. 218, I.). Dieses, als drittes Glied in die zweite Proportion gebracht, gibt:

$5 : 9 = \frac{15 \times 8}{3} : y$, wo $y = \frac{9 \times 15 \times 8}{3 \times 5}$. Diesen Bruch nun noch einmal zu dem letzten Verhältnisse als drittes Glied gesetzt, gibt $6 : 10 = \frac{9 \times 15 \times 8}{3 \times 15} : z$, wo denn $z = \frac{10 \times 9 \times 15 \times 8}{3 \times 5 \times 6} = 120$ wird.

Anderer Beweis.

Es sei $5 : 12 = 7 : x$, ferner

$8 : 15 = - : -$ und

$9 : 4 = - : -$ gegeben.

Man denke sich unter x, in der ersten Proportion, die durch die wirkliche Rechnung gefundene Größe dieses vierten Gliedes, so wird die zweite Proportion diese:

$8 : 15 = x : y$, wo wieder y das berechnete letzte Glied in dieser Proportion seyn kann. Endlich wird $9 : 4 = y : z$, wo z eigentlich Dasjenige ist, was gesucht wird. Die sämmtlichen Proportionen stehen daher folgendergestalt unter einander:

$5 : 12 = 7 : x$

$8 : 15 = x : y$ und

$9 : 4 = y : z$; folglich ist (nach §. 215.)

$5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 \times x \times y : x \times y \times z$, oder (nach §. 208.) $5 \times 8 \times 9 : 12 \times 15 \times 4 = 7 : z$, woraus denn (nach §. 218, I.) $z = \frac{12 \times 15 \times 4 \times 7}{5 \times 8 \times 9}$ wird, welches den Werth für z nach der obigen Auflösung gibt.

§. 222. Anmerkung. Die bisher entwickelten theoretischen Sätze von den Verhältnissen und Proportionen enthalten den Grund zu der Anwendung dieser Lehre auf die im gemeinen Leben am Meisten vorkommenden Rechnungen, und es wäre gegen den Zweck dieser Anfangsgründe gewesen, die Theorie derselben vollständiger auszuführen. Die wichtigsten dieser practischen Proportions-Rechnungen sollen nun ebenfalls vorgetragen werden.

I. Von der einfachen Regel Detri.

§. 223. Erklärung. Wenn man auf die Gegenstände Rücksicht nimmt, welche in den Rechnungen des gemeinen Lebens am Häufigsten vorkommen, so bemerkt man bald, daß zwischen denselben ein geometrisches Verhältniß Statt hat. Man findet, daß bei Vergrößerung oder Verringerung des einen, der andere mit ihm in Verbindung stehende ebenfalls gerade so vielmal vergrößert oder verringert werde, oder auch umgekehrt. Wer z. B. eine gewisse Menge von Waaren für einen bestimmten Preis eingekauft hat, wird, wenn er sechsmal soviele Waaren von der nämlichen Gattung kaufen will, auch einen sechsfach höhern Werth erlegen müssen. Im Gegentheil wird man für den

vierten Theil der nämlichen Waare auch nur den vierten Theil des Preises entrichten. Man sagt daher in dieser Rücksicht: die Waare verhält sich so wie der Preis, und auch der Preis so wie die Waare. Insbesondere heißt dieses Verhältniß hier ein gerades, weil, bei dem Größer- oder Kleinerwerden des einen zu vergleichenden Gegenstandes, auch der andere eben so vielmal größer oder kleiner wird. — Wer dagegen z. B. ein gewisses Werk durch eine bestimmte Anzahl Menschen in einer festgesetzten Zeit vollendet, wird für eben dieses Werk mehr Arbeiter nöthig haben, wenn er es in einer kürzern Zeit; und weniger, wenn er es in einer längern Zeit beendigen will. In diesem Falle nun wird der eine Gegenstand so vielmal vergrößert, so vielmal der andere verringert, und der eine so vielmal verringert, so oft der andere vergrößert wird. Ein solches Verhalten zweier Größen wird ein verkehrtes oder umgekehrtes Verhältniß genennt, und man sagt in obigem Beispiele: daß die Menge der Arbeiter sich verkehrt wie die Zeit verhalte; gleichwie sich auch wiederum die Zeit verkehrt wie die Zahl der Arbeiter verhält.

§. 224. Erklärung. Die einfache Regel Detri oder die Regel von drei Sätzen ist jene Proportionsaufgabe, welche fodert, daß man aus drei angegebenen Dingen (Sätzen), deren zwei unter sich gleichartig sind, ein viertes, welches mit dem angegebenen dritten von einerlei Art ist, durch Rechnung finden soll; so, daß dieses vierte in dem nämlichen geometrischen Verhältnisse zu dem dritten steht, wie das zweite zum ersten. Man fragt: Wenn 6 ℔ einer gewissen Materie 15 Gulden kosten, was werden 20 ℔ von eben dieser Materie werth seyn? — Hier sind die gegebenen 6 ℔ mit den angegebenen 20 ℔ gleichartig, so wie auch der (in Gulden) zu findende Preis

(dieser 20 ℔) mit den gegebenen 15 fl. von einerlei Art ist. Auch wird die zu findende Menge von Gulden, weil unter den angegebenen Dingen ein gerades Verhältniß (§. 223.) Statt hat, so vielmal größer, als die gegebene von 15 fl., so vielmal die 20 ℔ größer, als die 6 ℔ sind.

§. 225. Grundsätze. I. Aus §. 223 und 224. folgt, daß die Regel Detri nichts anders, als die geometrische Proportion sei, worin man aus drei gegebenen ersten Gliedern eine vierte geometrische Proportionalzahl (als das zu findende vierte Glied) suchet.

II. Daher müssen bei den Aufgaben, welche vermittelst der Regel Detri aufgelöst werden sollen, gerade drei Sätze, als die Glieder einer Proportion, gegeben seyn (§. 204.).

III. Unter diesen drei Sätzen müssen zwei von einerlei Art und der dritte muß mit dem zu findenden vierten gleichartig seyn (§. 224.).

§. 226. Aufgabe. Die Sätze, welche bei der einfachen Regel Detri vorkommen, zu ordnen und das fehlende vierte Glied zu bestimmen.

Auflösung. I. Man suche von den drei gegebenen Sätzen denjenigen, welcher mit dem zu findenden einerlei Namen hat, und setze denselben als drittes Glied in die Proportion.

II. Man untersuche, ob, zufolge der beiden andern gleichartigen Glieder, das zu findende vierte Glied größer oder kleiner, als das dritte werden wird, welches aus der Natur der Sache sowohl, als auch nach §. 223. leicht zu bestimmen ist.

III. Im ersten Falle von II. ist das zweite Verhältniß der zu bildenden Proportion vom Kleinern zum Größern; im zweiten hingegen vom Größern zum Kleinern (§. 184.). Man ordne demnach das erste Verhältniß, dessen beide Glieder gegeben sind, nach der nämlichen Ungleichheit,

d. h. in jenem Falle als ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern; in diesem als ein Verhältniß vom Größern zum Kleinern, so entsteht hieraus

IV. Eine Proportion, worin das fehlende vierte Glied aus den bekannten drei ersten (nach §. 218, I.) leicht berechnet werden kann.

Erläuterung dieser Auflösung.

Wenn 7 Ellen von einem gewissen Tuche 12 Gulden kosten, was wird man für 19 Ellen von eben diesem Tuche geben müssen?

Nach I. wird, weil hier Gulden gesucht werden, die gegebene Zahl von 12 Gulden das dritte Glied, und die Proportion wäre jetzt diese $- : - = 12 : x$. Nach diesem sieht man sogleich, daß die zu findende Guldenzahl größer, als die gegebene seyn werde, weil 19 Ellen mehr, als 7 Ellen sind, und hier ein gerades Verhältniß (§. 223.) Statt hat. Es ist folglich (nach II.) hier ein Verhältniß vom Kleinern zum Größern (§. 184.), und das erste Verhältniß der zu setzenden Proportion muß von der nämlichen Ungleichheit d. h. ebenfalls vom Kleinern zum Größern seyn. Daher entsteht (nach der Vorschrift von III.) folgende Proportion: $7 : 19 = 12 : x$, wo denn (nach §. 218, I.) $x = \frac{19 \times 12}{7} = \frac{228}{7} = 32\frac{4}{7}$ Gulden wird.

Beweis. Die Auflösung beruht unmittelbar auf den Sätzen in §§. 223, 224, 225 und auf §. 218, I.; daher bedarf sie keiner weitern Begründung.

§. 227. Anmerkung. Wenn die drei gegebenen Sätze als Glieder einer Proportion geordnet sind, so versuche man, ehe die Auflösung (nach §. 218, I.) unternommen wird, ob die §§. 212—214. ihre Anwendung finden oder nicht; weil nämlich, im Falle sich die verhältnißmäßigen Glieder durch einerlei Zahl heben lassen, dieses die Rechnung oft sehr erleichtert.

§. 228. Anmerkung. Wenn die gegebenen Sätze als drei Glieder einer Proportion geordnet sind und nunmehr das Product der mittlern Glieder durch das erste dividirt wird, um das letzte zu finden, so könnte über diese Auflösung folgender Zweifel entstehen. Die gegebenen Dinge in der Proportion sind benannte Zahlen (§. 99.). Wie kann man sich aber ein Product aus einer benannten Zahl in eine benannte denken, und was soll ein Quotient vorstellen, dessen Dividend ein Product aus zwei benannten Zahlen, dessen Divisor auch eine solche Zahl und außerdem noch von anderer Art ist? Wie kann man sich z. B. in §. 226. ein Product aus 19 Ellen in 12 Gulden erklären; und wie einen Quotienten, der herauskommt, wenn dieses Product durch 7 Ellen dividirt wird? (§. 108.) — Hier muß man bemerken, daß es bei der Regel Detri nur darauf ankommt, eine vierte geometrische Proportionalzahl (§. 223, 224.) zu finden. Sobald daher die gegebenen Sätze in der Proportion geordnet sind, werden sie nicht mehr als benannte Zahlen, sondern als Zahlen überhaupt angesehen. In der obigen Aufgabe betrachtet man also die Zahlen 7, 19 und 12 nicht mehr als Ellen und Gulden, sondern als bloße Mengen von Einheiten. Durch die Rechnung findet man nun, daß $32\frac{4}{7}$ das vierte Glied der Proportion werde. Auch diese Zahl drückt, als vierte geometrische Proportionalzahl, gewiß noch keine Menge von Gulden aus. Allein mit vollem Rechte sagt man doch, diese 19 Ellen werden $32\frac{4}{7}$ Gulden kosten, weil sich die Ellen gerade so wie die Gulden verhalten (§. 223.).

§. 229. Beispiele zur Uebung. I. Wenn 18 Arbeiter ein gewisses Werk binnen 40 Tagen verfertigen, in welcher Zeit werden 32 Personen das nämliche Werk vollenden?

Hier soll eine Menge von Tagen gesucht werden. Sie heiße x, so ist (nach §. 226, I.) — : = 40 : x. Weil nun die 32 Arbeiter das zu verfertigende Werk eher, als die 18 beendigen werden, so ist (nach §. 226, II., III., IV.) 32 : 18 = 40 : x; oder, indem man das erste und dritte Glied (nach §. 212, I.) durch 8 dividirt, 4 : 18 = 5 : x; oder, wenn man das erste Verhältniß mit 2 hebt,

$2 : 9 = 5 : x$, woraus denn (nach §. 218, I.) $x = \frac{9 \times 5}{2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ Tag wird.

II. Wenn $7\frac{3}{4}$ Pfunde einer gewissen Waare $12\frac{1}{2}$ Gulden kosten, was wird man für $18\frac{2}{3}$ Pfunde von eben dieser Waare geben müssen?

Es bedeute wieder x die zu suchenden Gulden, so ist die anzusetzende Proportion (nach §. 226.) diese: $7\frac{3}{4} : 18\frac{2}{3} = 12\frac{1}{2} : x$; oder, indem man die Brüche einrichtet, $\frac{31}{4} : \frac{56}{3} = \frac{25}{2} : x$ (§. 151, I.), ferner $31 : \frac{56}{3} = \frac{25 \times 4}{2} : x$ (213.), oder $93 : 56 = 50 : x$ (§. 213.), woraus $x = \frac{56 \times 50}{93} = \frac{2800}{93} = 30\frac{10}{93}$ Guld. = 30 Guld. und $\frac{10 \times 60}{93}$ Kr. (§. 169, I.) $= \frac{600}{93} = 6\frac{42}{93}$ Kr. = 6 Kr. $\frac{42 \times 4}{93}$ Pf. (§. 169, I.) $= \frac{168}{93}$ Pf. $= 1\frac{75}{93}$ Pf. $= 1\frac{25}{31}$ Pf. Folglich ist $x = 30$ Guld. 6 Kr. $1\frac{25}{31}$ Pf.

III. Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 23850 Gulden in einem Jahre ertragen, wenn man von 100 Gulden $4\frac{1}{2}$ Gulden Interessen bekommt?

Man sucht die Zinsen = x, und die Proportion ist diese:

$100 : 23850 = 4\frac{1}{2} : x$, oder

$10 : 2385 = \frac{9}{2} : x$, oder

$20 : 2385 = 9 : x$, wo denn $x = \frac{2385 \times 9}{20} = \frac{21465}{20} = 1073\frac{1}{4}$ Gulden ist; d. h. das gegebene Kapital wird 1073 Gulden 15 Kreuzer als jährliche Zinsen bringen.

§. 230. Anmerkung. Hätte der Fall Statt, daß die gegebenen Sätze benannte Zahlen von verschiedenen Wertharten wären, so müßten dieselben, wenn sie in eine Proportion geordnet sind, zuerst (nach §. 107.) auf Einheiten der niedrigsten Werthart reducirt werden. Nach diesem geschieht die fernere Auflösung wie oben (in §. 226.); z. B. 8 Centner, 75 Pfunde, 12 Lothe, 3 Quent-

chen kosten 148 Gulden, 24 Kreuzer; wie viel wird man für 337 Gulden und 36 Kreuzer bekommen? — Hier ist (nach §. 226.) die Proportion diese: 148 Gulden 24 Kreuzer : 337 Gulden 36 Kreuzer = 8 Centner 75 Pfund 12 Lothe 3 Quentchen : x. Reducirt man im ersten und zweiten Gliede alles auf Kreuzer, und im dritten auf Quentchen, so entsteht hieraus Folgendes:

8904 Kr. : 20256 Kr. = 112051 Quent. : x, oder 1113 : 2532 = 112051 : x;

folglich $x = \frac{2532 \times 112051}{1113} = \frac{283713132}{1113}$ Quent. = 19 Cent. 91 Pfunde, 15 Lothe und $\frac{538}{1113}$ Quentchen.

Nach gleichem Muster werden alle ähnliche Aufgaben dieser Art behandelt und es ist zweckmäßig, sich in solchen Beispielen zu üben.

II. Gewinn- und Verlust-Rechnung.

§. 231. Erklärung. Eine Rechnung, welche als Anwendung der einfachen Regel Detri erscheint, und bei den Geschäften des gemeinen Lebens häufig vorkommt, ist die sogenannte Gewinn- und Verlust-Rechnung. Sie begreift jene Fälle, wo der bei dem Kauf und Verkauf oder auch bei andern Geschäften des bürgerlichen Lebens sich ergebende Gewinn oder Verlust nach 100 bestimmt wird. Dasjenige, was an jedem 100 einer gewissen Summe gewonnen oder verloren wird, heißt Procentgewinn oder Procentverlust. Wer z. B. eine Parthie Waaren für 300 Gulden eingekauft und dieselbe wieder für 315 Gulden abgesetzt hat, hat 5 am 100 gewonnen, und sein Procentgewinn ist daher 5 Gulden. Hätte er diese Waaren für 288 Gulden verkauft, so würde sein Procentverlust 4 Gulden gewesen seyn; denn er hätte 4 Gulden an jedem Hundert verloren

§. 232. Zusatz. Die Fälle welche nach dieser Erklärung vorkommen können, reduciren sich zunächst auf nachfolgende zwei Aufgaben:

I. Aus der gegebenen Einkaufs-Summe die Größe der Verkaufs-Summe zu bestimmen, um einen angegebenen Procentgewinn zu erhalten.

II. Aus der bekannten Verkaufs-Summe nebst dem bekannten Procentgewinne oder Procentverluste die Größe der Einkaufs-Summe zu berechnen,

deren jede eine besondere Weisung zur Auflösung erfodert.

§. 233. Aufgabe. Die Größe der Verkaufs-Summe zu bestimmen, wenn die Einkaufs-Summe nebst dem Procentgewinn gegeben ist.

Auflösung. Man addire den gegebenen Procentgewinn zu 100, so ist 100 als bloßer Einkauf (d. h. als die normale Einkaufs-Summe), und jene Summe als Verkauf mit Procentgewinn anzusehen. Nebst diesen beiden Größen ist nun noch die Einkaufssumme bekannt. Man ordne dieselben daher, als drei Glieder einer Proportion, nach der Regel: Die bloße (normale) Einkaufs-Summe verhält sich zur gegebenen Einkaufs-Summe, wie der beabsichtigte Verkauf mit Procentgewinn sich zu dem zu findenden Verkauf mit Procentgewinn verhält, und bestimme nun (nach §. 218, I.) die Größe des fehlenden vierten Gliedes.

Beweis. Weil aus der Natur der Sache folgt, daß zwischen der Einkaufs-Summe und jener des Verkaufs mit Procentgewinn ein gerades geometrisches Verhältniß besteht, so hat auch hier die geometrische Proportion und die Auflösung von §. 226. und §. 218, I. Statt.

Beispiele. I. Ein Kaufmann hat eine Parthie Waaren für 1350 Gulden eingekauft. Wie theuer muß er dieselbe verkaufen, um an jedem Hundert Gulden 6 Gulden zu gewinnen.

Hier sind 100 Gulden als bloßer Einkauf, und 106 Gulden als der beabsichtigte Verkauf mit Procentgewinn anzusehen. Folglich ist die Proportion diese:

100 : 1350 = 106 : x, oder

10 : 135 = 106 : x (§. 208.), oder

5 : 135 = 53 : x (§. 212, I.), oder

1 : 27 = 53 : x (§. 208.); folglich ist

x = 27 × 53 = 1431 Gulden.

Hier hätte man auch kurz so rechnen können. Wer an 100 Gulden 6 Gulden gewinnen will, wird an 1350, d. h. an $13\frac{1}{2}$mal 100 Gulden (da $\frac{1350}{100} = 13\frac{1}{2}$ ist) auch $13\frac{1}{2}$mal 6 Gulden gewinnen. Dieser Gewinn ist $13\frac{1}{2} \times 6 = 81$ Gulden. Daher muß er für 1350 + 81 d. h. für 1431 Gulden wieder verkaufen, wie so eben gefunden wurde. Dieses veranlaßt Uebungen im Kopfrechnen.

II. Wie theuer muß ein Wirth das Stück Wein, welches er für 540 Gulden eingekauft hat, wieder verkaufen, um 15 Gulden am 100 zu gewinnen?

Hier ist die Proportion diese:

100 : 540 = 115 : x, oder

10 : 54 = 115 : x, oder

5 : 27 = 115 : x, oder

1 : 27 = 23 : x, folglich wird

x = 27 × 23 = 621 Gulden.

Auch diese Aufgabe kann auf die vorige Weise (in I.) aufgelöset werden. Wer nämlich an 100 Gulden einen Gewinn von 15 Gulden machen will, wird (da 500 = 5 × 100) an 500 Gulden einen Gewinn = 15 × 5 = 75 Gulden und an 40 Gulden einen Gewinn = $\frac{15}{10} \times 4 = 1,5 \times 4 = 6$ Gulden, somit an 540 Gulden einen Gewinn = 75 + 6 = 81 Gulden erhalten. Daher muß er für 540 + 81, d. h. für 621 Gulden ver-

kaufen, um 15 am 100 zu gewinnen, welches mit dem vorigen genau übereinstimmt.

§. 234. Anmerkung. I. Es ist einleuchtend, daß nach dieser Auflösung (in §. 233.) auch der Fall berechnet werden müsse, wenn anstatt des Procentgewinns, der Procentverlust gefunden werden soll. Z. B. ein Kaufmann kaufte eine gewisse Menge Waaren für 1350 Gulden und verkauft sie mit 4 Procent Verlust. Was hat er aus dem Verkauf erlöst?

Die Regel zur Auflösung ist hier diese: der bloße Einkauf (der = 100 angenommen wird) verhält sich zu dem bloßen (durch den gegebenen Rechnungsfall bestimmten) Einkaufe, wie der Verkauf mit Procentverlust zu dem Verkaufe mit Procentverlust. Da nun hier 4 am 100 sind verloren worden, so ist 100 — 4 = 96 der Verkauf mit Procentverlust am 100, und folglich die Proportion diese:

$100 : 1350 = 96 : x$, oder

$10 : 135 = 96 : x$, oder

$5 : 135 = 48 : x$, oder $1 : 27 = 48 : x$. Daher $x = 27 \times 48 = 1296$ Gulden, und dies war der Preis des Verkaufs. Weil nun der Einkauf 1350 Gulden betrug, so hatte er überhaupt einen Verlust von 1350 — 1296 = 54 Gulden.

II. Auch hier hätte man so sagen können: Wer an jedem 100 einen Verlust von 4 erleidet, wird an 1350, d. h. an einer Summe, welche $13\frac{1}{2}$mal größer ist, auch $13\frac{1}{2}$mal mehr, d. h. er wird $13\frac{1}{2} \times 4 = 54$ Gulden verlieren.

§. 235. Anmerkung. Oft hat der Fall Statt, daß in diesen Aufgaben (von §. 234.) gefunden werden soll, wie theuer ein kleinerer Theil als jener, worin der Einkauf geschah, wieder verkauft werden soll, um einen bestimmten Procentgewinn zu erhalten. Z. B. Ein Wirth kaufte ein Stück Wein für 350 Gulden, und verlangt zu wissen, wie hoch er eine Maß davon wieder verkaufen müsse, um 6 Gulden am 100 zu gewinnen? —

Hier sucht man zuerst (nach §. 233.), wie hoch das ganze Stück zu verkaufen ist, um den bestimmten Procentgewinn zu erhalten. Man bekommt folgende Proportion $100 : 350 = 106 : x$, woraus $x = 371$ Gulden wird. Weil nun ein Stück Wein 600 Maße enthält, so wird $\frac{371}{600}$ Gulden den Preis einer Maß bestimmen. Allein $\frac{371}{600}$ Gulden $= \frac{371 \times 60}{600}$ Kr. $= \frac{371}{10}$ Kr. $= 37\frac{1}{10}$ Kr. Daher muß die Maß um $37\frac{1}{10}$ Kr. verkauft werden, um den verlangten Gewinn zu erhalten.

Ferner: Man hat für 68 Pfunde einer gewissen Waare 136 Gulden gegeben: wie hoch muß ein Loth verkauft werden, um 12 Procent Gewinn zu erhalten? — Hier ist wieder der Ansatz dieser: $100 : 136 = 112 : x$, wo $x = \frac{3808}{25}$ Gulden wird. Da nun 32 Lothe auf ein Pfund gehen, so betragen die 68 Pfunde so viel als $68 \times 32 = 2176$ Lothe, und der gefundene Werth muß noch durch $2176 \times 25 = 54400$ dividirt werden. Dieses gibt $\frac{3808}{54400}$ Guld. $= \frac{3808 \times 60}{54400}$ Kr. $= \frac{228480}{54400} = \frac{22848}{5440} = 4\frac{1088}{5440}$ Kr. = 4 Kr. und beinahe 1 Pfennig.

§. 236. Aufgabe. Die Größe der Einkaufs-Summe zu bestimmen, wenn die Verkaufs-Summe nebst dem Procent-Gewinn angegeben ist.

Auflösung. Man addire den gegebenen Procent-Gewinn zu 100, so ist diese Summe als Verkauf mit Procent-Gewinn und die 100 allein als bloßer Einkauf anzusehen. Nebst diesen ist der angegebene Verkauf mit Procent-Gewinn bekannt. Daher sind drei Sätze vorhanden, wozu der verhältnißmäßige vierte gefunden werden soll. Man ordne nun diese Sätze nach der Regel: Die Summe aus der Normalzahl (100) nebst dem Procentgewinn verhält sich zu der gegebenen Verkaufs-Summe, wie sich jene Normalzahl (100) zur Einkaufs-Summe verhält, und löse sodann diese Proportion (nach §. 218, I.) auf.

Beweis. Da es aus der Natur der Sache folgt, daß zwischen den in der Auflösung erwähnten (unter sich paarweise gleichartigen) Sätzen gerade geometrische Verhältnisse Statt haben, so beruht die Richtigkeit derselben wiederum auf §. 126 und 218, I.

Beispiele. I. Ein Kaufmann setzte eine gewisse Menge Waaren für 1480 Gulden ab, und weiß, daß er 25 am 100 gewonnen hat. Wie groß war der Einkauf?

Hier ist 125 Gulden die Summe aus der Normalzahl (100) nebst dem bekannten Procent-Gewinn, die Zahl der erlößten 1480 Gulden ist die Verkaufs-Summe und die Zahl des bloßen Einkaufs ist 100. Folglich wird die Proportion diese:

$125 : 1480 = 100 : x$, oder

$5 : 1480 = 4 : x$, oder

$1 : 296 = 4 : x$, woraus

$x = 296 \times 4 = 1184$ Gulden wird, welches der bloße Einkauf ist.

II. Wie hoch war der Einkauf eines Stück Weines, wenn dasselbe mit 30 Gulden Procent-Gewinn für 1345 Gulden verkauft worden ist?

Die Anordnung der Sätze in die Proportion gibt Folgendes: $130 : 1345 = 100 : x$, oder

$13 : 1345 = 10 : x$,

woraus $x = \frac{1345 \times 10}{13} = \frac{13450}{13} = 1034\frac{8}{13}$ Gulden wird.

§. 237. Anmerkung. Wäre in der Aufgabe des vorigen §. anstatt des Verkaufs mit Procent-Gewinn, der Verkauf nebst dem Procent-Verluste gegeben, so ist es einleuchtend, daß auch hieraus die Größe des Einkaufs gefunden werden kann. Z. B. Ein Kaufmann verkauft eine Parthie Waaren für 2500 Gulden mit einem Procentverluste von 4 Gulden. Wie hoch war der Einkauf?

Die Regel zur Auflösung ist diese: Verkauf mit Procent-Verlust verhält sich zum Verkaufe mit Procent-Verlust, wie bloßer Einkauf zum bloßen Einkaufe. Wer nun 4 Procent Verlust erleidet, bekommt für 100 nur 100 — 4 oder 96 Gulden. Daher ist Folgendes der Ansatz:

$96 : 2500 = 100 : x$, oder

$24 : 625 = 100 : x$, oder

$6 : 625 = 25 : x$, woraus $x = \frac{625 \times 25}{6} = \frac{13625}{6} = 2604\frac{1}{6}$ Gulden, d. h. 2604 Guld. 10 Kr. wird.

§. 238. Anmerkung. Desgleichen ist klar, daß die Aufgabe des §. 235. auch auf Procent-Verlust angewendet werden könne,

und daß die bisherigen Lehren zur Auflösung derselben hinreichen. Ein Beispiel hievon sei Folgendes: Man verkauft das Loth einer gewissen Materie für 12 Kr. mit 3 Procent Verlust. Wie hoch hat man 86 Pfunde von eben dieser Waare eingekauft? — Der Ansatz ist dieser: $97 : 12 = 100 : x$, wo $x = \frac{1200}{97}$. Nun ist aber 86 Pf. $= 86 \times 32 = 2752$ Lothe. Folglich $\frac{1200 \times 2752}{97} = \frac{3302400}{97} = 34045\frac{35}{97}$ Kr. $= 567$ Guld. $25\frac{35}{97}$ Kr.

§. 238. a. Anmerkung. Außer den oben (§. 232.) bemerkten zwei Hauptfällen kann noch folgender dritte Fall stattfinden: Man soll aus der bekannten Einkaufssumme und aus der Verkaufssumme die Größe des Procent-Gewinnes (wenn diese größer als jene ist) oder des Procent-Verlustes (wenn das Umgekehrte eintritt) finden. — Ein Beispiel wird die Auflösung deutlich machen. Wenn ein Grundstück für 1280 Guld. eingekauft und für 1536 Guld. wieder verkauft worden ist, wie groß war der Procent-Gewinn? Der Gesammt-Gewinn betrug hier $1536 - 1280 = 256$ Guld. Nun frage man so: An 1280 Guld. wurden 256 Guld. gewonnen, wieviel betrug der Gewinn für 100 Guld.? Dieses gibt die Proportion:

$$1280 : 256 = 100 : x, \text{ oder}$$
$$128 : 256 = 10 : x, \text{ oder}$$
$$1 : 2 = 10 : x, \text{ welches}$$
$$x = 2 \times 10 = 20 \text{ Guld. gibt.}$$

Demnach betrug der Procent-Gewinn 20 Guld. — Ganz auf ähnliche Art kann auch der Procent-Verlust berechnet werden.

III. Zusammengesetzte Regel Detri.

§. 239. Erklärung. Die zusammengesetzte Regel Detri faßt jene Aufgaben unter sich, wo es darauf ankommt, aus mehr als drei gegebenen bekannten Größen, z. B. aus fünf, sieben, neun oder noch mehreren, wovon zwei paarweis unter sich gleichartig sind, eine unbekannte verhältnißmäßige Zahl durch Rechnung zu finden, welche mit der, noch einzeln stehenden, gegebenen Zahl gleichartig ist. Man nennt diese Rechnung auch die Regel Dequinque, weil es am Häufigsten vorkommt, aus fünf gegebenen Sätzen den unbekannten sechsten zu

finden. Ein Beispiel zur Erläuterung wäre dieses: Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 5870 Gulden in 6 Jahren ertragen, wenn man von 3500 Gulden in 8 Jahren 1400 Gulden Interessen bekommt?

§. 240. Grundsätze. I. In der zusammengesetzten Regel Detri ist die Anzahl der gegebenen Dinge immer eine ungerade, d. h. man sucht entweder aus fünf Sätzen den sechsten; aus sieben den achten, oder aus neun den zehnten u. s. w.

In dem Beispiele des vorigen §. soll man aus den gegebenen Kapitalien von 5870 Gulden und 3500 Gulden; dann aus den verschiedenen Zeiten von 6 und von 8 Jahren, während welcher sie auf Interessen liegen, und endlich aus den angegebenen Zinsen von 1400 Gulden die unbekannten verhältnißmäßigen Interessen finden.

II. Unter den angegebenen Dingen sind immer mehrere Paare unter sich, und das noch übrige alleinstehende ist mit dem zu findenden Gliede von einerlei Art.

Im angeführten Beispiele sind die 5870 Gulden mit den 3500 Gulden, als Kapitalien; ferner die 6 und 8 Jahre, als die bestimmte Zeit, und endlich die 1400 Gulden als die gegebenen Zinsen mit den zu findenden Zinsen von der nämlichen Art.

III. Jedes Paar dieser gleichartigen Dinge (in II.) bildet in Vergleichung mit demjenigen, welches noch übrig bleibt, eine einfache Regel Detri (§. 223.). Denn jedes Paar derselben bestimmt, in Vergleichung mit diesem einzelnen Gliede, die verhältnißmäßige Größe des zu findenden Gliedes.

In der obigen Aufgabe sucht man die Zinsen. Die Größe derselben hängt aber sowohl von der Größe des Kapitals, welches auf Interessen ausgelegt ist, als auch

von der Länge der Zeit ab, während welcher dieses Kapital auf Zinsen liegt. Die Menge der zu findenden Zinsen muß folglich einmal nach der Größe der beiden Kapitalien von 5870 und 3500 Gulden, und dann auch noch einmal nach der bestimmten Zeit von 6 und von 8 Jahren berechnet werden. Daher kann man sagen, die zu findenden Zinsen stehen in einem zusammengesetzten Verhältnisse aus der Größe dieser Kapitalien und aus der Länge der Zeit, während welcher sie ausgeliehen waren.

§. 241. Aufgabe. Bei der zusammengesetzten Regel Detri aus fünf gegebenen Sätzen den unbekannten sechsten durch Rechnung zu finden.

Auflösung. I. Man nehme dasjenige von den fünf gegebenen Dingen, welches mit dem zu findenden von einerlei Art ist (§. 240, II.) und setze es als drittes Glied in eine Proportion, wozu x das zu findende vierte Glied ist.

II. Nun wähle man irgend ein Paar von den gegebenen gleichartigen Dingen (§. 240, II.), vergleiche dasselbe mit dem dritten in I. und bestimme (nach §. 226, II.), ob das vierte Glied größer oder kleiner, als das dritte seyn wird. In jenem Falle wird das erste Verhältniß der Proportion vom Kleinern zum Größern; in diesem hingegen vom Größern zum Kleinern werden (§. 226, III.).

III. Nun gehe man zu dem andern Paare der gegebenen gleichartigen Dinge über, setze das erste Paar derselben in II. ganz außer Augen, vergleiche wie in II. das dritte Glied mit demselben, und bestimme wieder, ob das zu findende vierte Glied hierdurch größer oder kleiner als dieses dritte werden wird. Hieraus ergibt es sich, ob das Verhältniß, welches aus diesen beiden gleichartigen Gliedern zu bilden ist, vom Kleinern zum Größern, oder vom Größern zum Kleinern seyn werde.

IV. Dieses zweite Verhältniß in III. setze man unter das erste in II., multiplicire die gleichnamigen Glieder mit einander, suche zu diesen beiden Producten und dem dritten Gliede (nach §. 218, I.) das verhältnißmäßige vierte, so ist dieses das zu findende sechste in der Aufgabe.

Erläuterung dieser Auflösung.

In dem Beispiele des §. 239. sollen Zinsen gefunden werden. Daher werden die gegebenen Interessen zu 1400 Gulden nach I. das dritte Glied einer Proportion, welche man mit den fehlenden Gliedern so vorstellen kann — : — = 1400 : x. Sieht man nun (mit Hinweglassung der verschiedenen Zeit) allein auf die gegebenen Kapitalien, so ist klar, daß 5870 Gulden (in der nämlichen Zeit) mehr Zinsen als 1400 Gulden bringen werden, da die 3500 Gulden schon 1400 Gulden ertragen. Folglich wird das Verhältniß dieser angegebenen Kapitalien die zu findenden Zinsen vergrößern, und nach II. ist die Proportion diese: 3500 : 5870 = 1400 : x. Jetzt sehe man allein auf die verschiedene Zeit und nehme auf die Kapitale keine Rücksicht mehr, so ergibt sich, daß einerlei Summe in 6 Jahren weniger Zinsen bringt, als in 8 Jahren. Daher macht dieser neue Umstand, daß das vierte Glied wiederum verringert wird, und nach III. steht nun alles so:

$$\left.\begin{array}{l} 3500 : 5870 \\ \;\;8 \;\;:\;\; 6 \end{array}\right\} = 1400 : x.$$

Multiplicirt man nunmehr (nach IV.) die ersten und zweiten Glieder mit einander, so entsteht Folgendes: 28000 : 35220 = 1400 : x, woraus $x = \frac{35220 \times 1400}{28000}$ $= \frac{3522 \times 14}{28} = \frac{3522}{2} = 1761$ Gulden wird.

Beweis. Aus dem bisherigen (besonders aus §. 240, III.) folgt, daß nach obiger Aufgabe die Größe des

sechsten Gliedes durch die Verhältnisse der beiden Paare gleichnamiger Dinge in (§. 240, III.) bestimmt werde, und daß folglich hier die einfache Regel Detri (§. 224.) zweimal angebracht werden müsse. Nach diesem fand man die erste Proportion in obigem Beispiele auf folgende Art: $3500 : 5870 = 1400 : x$, woraus $x = \frac{5870 \times 1400}{3500}$ geworden wäre. Allein dieses x ist noch nicht das zu findende unbekannte in obiger Aufgabe, sondern muß erst noch durch das zweite Verhältniß in III. bestimmt werden, welches Folgendes gibt: $8 : 6 = \frac{5870 \times 1400}{3500} : y$, worin $y = \frac{5870 \times 1400 \times 6}{3500 \times 8} = 1761$, wie oben wird. — Weil sich nun dieser Beweis, wie man leicht einsieht, nicht auf die Zahlen des gegenwärtigen Beispiels allein beschränkt, sondern vielmehr in allen andern Fällen ähnlicher Art auf gleiche Weise geführt werden kann, so ist die obige Auflösung auch allgemein gerechtfertiget.

§. 242. Beispiele zur Uebung. I. Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben?

Weil hier die Größe eines Kapitals gesucht wird, so ist das gegebene Kapital von 6800 Gulden das dritte Glied der Proportion. Nimmt man nun auf die Verschiedenheit der Zeit keine Rücksicht, so ist klar, daß ein Kapital, welches 2520 Gulden Zinsen geben soll, größer seyn muß, als ein anderes, welches in eben der Zeit nur 340 Gulden Interessen erträgt. Folglich ist der erste Ansatz dieser: $340 : 2520 = 6800 : x$.

Sieht man hingegen auf die Zeit, so muß man fragen: Wie groß ein Kapital sei, welches in 8 Jahren eine gewisse Menge Zinsen gibt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren eben so viele Interessen ertragen? — Hier wird das

zu findende Kapital kleiner als 6800 Gulden werden, da es länger auf Zinsen liegt, und das neue Verhältniß, welches in obige Proportion kommt, ist dieses: 8 : 6. Daher wird der ganze Ansatz folgender:

$$\left.\begin{matrix} 340 : 2520 \\ 8 : 6 \end{matrix}\right\} = 6800 : x. \text{ Demnach}$$

ist 2720 : 15120 = 6800 : x, und es wird

$$x = \frac{15120 \times 6800}{2720} = 37800 \text{ Gulden.}$$

II. Wenn 18 Personen in 17 Monaten 2350 Gulden zu ihrem Unterhalte brauchen, wie viel werden 64 Personen in 14 Monaten bedürfen?

Weil hier eine Summe von Gulden gesucht wird, so ist die gegebene Zahl von 2350 Gulden das dritte Glied. Vergleicht man die verschiedene Anzahl von Personen mit demselben, so ist klar, daß 64 Menschen in der nämlichen Zeit mehr als 18 brauchen, daß folglich das Verhältniß = 18 : 64 werde. Wird hingegen die Zeit in Anschlag gebracht, so ergibt sich, daß man in 14 Monaten weniger, als in 17 brauche; daß folglich dieses Verhältniß = 17 : 14 werde. Der ganze Ansatz ist daher dieser:

$$\left.\begin{matrix} 18 : 64 \\ 17 : 14 \end{matrix}\right\} = 2350 : x; \text{ folglich wird}$$

$$306 : 896 = 2350 : x, \text{ welches}$$

$$x = \frac{896 \times 2350}{306} = 6881 \tfrac{7}{153} \text{ Gulden gibt.}$$

III. Wenn 24 Personen täglich 7 Stunden arbeiten, so vollenden sie ein gewisses Werk binnen 30 Tagen. Wie viele Arbeiter wird man haben müssen, um dieses Werk in 40 Tagen zu vollenden, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten?

Aus dem Sinne dieser Aufgabe erhellet, daß das dritte Glied die gegebene Zahl von 24 Arbeitern, und daß sowohl das Verhältniß der Stunden, als auch jenes der

Tage, vom Größern zum Kleinern werden müsse. Daher ist der Ansatz dieser:

$$\left.\begin{matrix} 9 : 7 \\ 40 : 30 \end{matrix}\right\} = 24 : x; \text{ folglich wird}$$

$$360 : 210 = 24 : x, \text{ welches}$$

$x = \frac{210 \times 24}{360} = \frac{504}{36} = 14$ gibt. — Wenn die Rechnung für x eine ganze Zahl und einen ächten Bruch gäbe, so müßte man, weil sich hier kein Theil eines Arbeiters denken läßt, die nächstfolgende ganze Zahl, oder einen Arbeiter nehmen, welcher verhältnißmäßig weniger arbeitet.

IV. Zwei Personen messen in 8 Stunden 40 Stecken Holz. Wie viel Personen muß man haben, um 680 Stecken innerhalb 6 Stunden auszumessen?

Die gegebenen 2 Personen bilden das dritte Glied, und es folgt, daß sowohl das Verhältniß der Stunden, als jenes der zu messenden Stecken vom Kleinern zum Größern seyn müsse. Folglich steht der Ansatz so:

$$\left.\begin{matrix} 6 : 8 \\ 40 : 680 \end{matrix}\right\} = 2 : x, \text{ welches}$$

$$240 : 5440 = 2 : x \text{ gibt, woraus}$$

$x = \frac{5440 \times 2}{240} = \frac{1088}{24} = 45\frac{1}{3}$ wird, wofür man 46 oder 45 und noch einen Arbeiter, welcher nur in dem dritten Theil der bedungenen Arbeitszeit arbeitet, nehmen kann.

§. 243. Anmerkung 1. Sollten bei dem Ansatze der gegebenen Glieder in der Regel Dequinque Fälle vorkommen, welche von der Art der in §§. 212, I. 213, 214. genannten sind, so muß man sich zur Abkürzung der Rechnung der dortigen Weisung bedienen. Es ist überhaupt eine sehr nützliche Uebung für Anfänger, sich in der Auflösung solcher Fälle eine besondere Fertigkeit zu erwerben.

II. Da bei jeder Regel Dequinque aus fünf gegebenen Stücken das verhältnißmäßig sechste gesucht und auch gefunden wird, so ist klar, daß irgend fünf dieser Größen die sechste jedesmal bestimmen müssen. Daher lassen sich aus jeder solchen Aufgabe noch

fünf andere Fragen bilden. Die Bildung dieser Fragen durch ihre Einkleidung in Worte ist eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger. Weil jedoch unter diesen sechs Größen drei Paare von gleichartigen sind, so entstehen eigentlich auch nur drei Hauptfragen, deren jede sich aber wieder in zwei einander ähnliche abtheilt. Zum Beispiele diene die Frage in §. 242, I.

1) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches in 8 Jahren 2520 Gulden Zinsen bringt, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben? Antwort: 37800 Gulden.

2) Wie lange muß ein Kapital von 37800 Gulden ausgeliehen seyn, um 2520 Gulden als Zinsen zu bringen, wenn 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen geben? Antwort: 8 Jahre.

3) Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 37800 Gulden in 8 Jahren tragen, wenn man von 6800 Gulden in 6 Jahren 340 Gulden Interessen erhält? Antwort: 2520 Gulden.

Auf gleiche Weise lassen sich diese Fragen auch stellen, um entweder das Kapital von 6800 Gulden, oder die Zeit von 6 Jahren, oder die Zinsen von 340 Gulden als viertes Glied zu finden.

§. 244. Zusatz. Oefters hat der Fall Statt, daß man aus mehr als fünf gegebenen Dingen ein verhältnißmäßiges unbekanntes finden soll; d. h. aus sieben ein achtes, aus neun ein zehntes u. s. w. Die Regel zur Auflösung dieser Aufgabe ist hier immer die nämliche wie oben (§. 241); nur mit dem Unterschiede, daß für jedes neue Paar von Gliedern auch ein neues Verhältniß in den Ansatz kommt, dessen Glieder nach der obigen Weisung geordnet werden. Ein Beispiel wird dieses deutlicher machen. Man fragt: Wie groß muß ein Kapital seyn, welches innerhalb 10 Jahren zu 4 Procent 5300 Gulden Interessen bringt, wenn eine Summe von 6500 Gulden binnen 6 Jahren zu 5 Procent 1950 Gulden Zinsen gibt? — Hier sind sieben Dinge angegeben, man sucht das verhältnißmäßige achte. Von 6 derselben sind immer (paarweis) zwei unter sich, und das siebente ist mit dem zu findenden achten von einerlei Art. Diese sechs Glieder geben drei Verhältnisse, deren jedes (in Vergleichung mit

dem dritten) die Größe des unbekannten achten bestimmen hilft. Sieht man zuerst allein auf die 10 und 6 Jahre, so wird das zu findende Kapital kleiner, als 6500 Gulden; folglich ist das erste Verhältniß = 10 : 6. Nimmt man nun auf die 4 und 5 Procent Rücksicht, so wird nach diesem x > 6500 Gulden; folglich das zweite Verhältniß = 4 : 5. Betrachtet man endlich die 5300 Gulden und die 1950 Gulden Interessen, so wird hieraus wieder x > 6500 Gulden; daher entsteht das Verhältniß 1950 : 5300. Der Ansatz ist folglich dieser:

$$\left.\begin{array}{r} 10 : 6 \\ 4 : 5 \\ 1950 : 5300 \end{array}\right\} = 6500 : x$$

Folglich $10 \times 4 \times 1950 : 6 \times 5 \times 5300 = 6500 : x$, welches $x = \frac{6 \times 5 \times 5300 \times 6500}{10 \times 4 \times 1950} = 13250$ Gulden gibt.

§. 245. Anmerkung. Aus dem Bisherigen erhellet überhaupt, daß für jedes Paar gleichnamiger Dinge, welche nebst den fünf angegebenen noch vorkommen können, immer ein neues Verhältniß mehr in den Ansatz kommen wird. Oft hat auch der Fall Statt, daß die Anzahl der in der Aufgabe enthaltenen Dinge dadurch vermindert wird, daß man mehrere in einander multipliciren muß, ehe die Rechnung ausgeführt werden kann. Wenn z. B. der Körperraum einer Mauer, eines Grabens oder dergleichen, nach Länge, Breite und Tiefe gegeben ist, so muß man (nach geometrischen Gründen, deren Richtigkeit hier unbewiesen angenommen werden muß), um die ganze Größe dieser Räume zu bestimmen, ein Product aus dem in Zahlen ausgedrückten Maße ihrer Länge, Breite und Tiefe machen, weil sich diese Producte eben so verhalten, wie die Räume, zu welchen diese drei Ausdehnungen als Factoren gehören. Man fragt: In wie viel Zeit werden 20 Arbeiter eine Mauer, welche 35 Schuhe lang, 12 Schuhe hoch und 3 Schuhe breit ist, aufführen, wenn 12 Arbeiter eine andere Mauer von 48 Schuhe Länge, von 8 Schuhe Höhe und von 2 Schuhe Dicke binnen 20 Tagen errichten? Um hier die körperliche Größe von beiden Mauern zu finden, muß man das Maß der Länge, Breite und Dicke einer jeden mit einander multipliciren. Dies gibt, für die Größe der ersten Mauer, ein Product = 35

$\times 12 \times 3 = 1260$, und für die andere $= 48 \times 8 \times 2 = 768$. Durch dieses Verfahren ist also obige Frage in eine gewöhnliche Aufgabe von 5 Sätzen verwandelt worden, und der Ansatz nunmehr (nach §. 241.) dieser:

$$\left.\begin{matrix} 20 : 12 \\ 768 : 1260 \end{matrix}\right\} = 20 : x, \text{ folglich } x =$$

$$\frac{12 \times 1260 \times 20}{768 \times 20} = \frac{12 \times 1260}{768} = 19\frac{528}{768} \text{ Tage} = 19\frac{66}{96} =$$

$19\frac{11}{16}$ Tage, d. h. beinahe 20 Tage.

§. 246. Anmerkung. Da man die Proportionsaufgaben auch vermittelst der sogenannten Reesischen Regel auflösen kann, so soll in den folgenden §§. das Wesentlichste davon beigebracht werden. Diese Rechnungsweise hat ihren Namen von einem Holländer K. F. de Rees, welcher dieselbe in seiner (holländisch geschriebenen) practischen Rechenkunst zuerst gelehrt hatte. Eine deutsche Uebersetzung dieser Schrift ist i. J. 1739, und später in mehreren Auflagen zu Göttingen erschienen.

§. 247. Erklärung. Alle Fragen, welche bei der Regel Dequinque vorkommen, lassen sich in zwei Sätze fassen, wovon der eine der Bedingnißsatz, der andere aber der Fragsatz genennt werden kann. Bedingnißsatz heißt jener Theil der Aufgabe, welcher die drei gegebenen, unter sich ungleichartigen Glieder enthält, und die Bedingniß ausspricht, auf welche sodann die Frage gegründet ist; den Fragsatz aber nenne ich jenen Theil der Aufgabe, welcher nur zwei der gegebenen Glieder enthält und die Frage ausspricht, welche eigentlich beantwortet werden soll. Zur Erläuterung dieser Erklärung sei die Aufgabe folgende:

Was kostet der Transport von 875 ℔ auf eine Entfernung von 18 Stunden Wegs, wenn man für 600 ℔ auf eine Entfernung von 20 Stunden Wegs 9 Gulden zu zahlen hat?

Hier heißt der Bedingnißsatz so: Wenn 600 ℔ auf 20 Stunden Wegs zu transportiren 9 Gulden

kosten, und der Fragsatz lautet: Was wird dann der Transport von 875 ℔ auf 18 Stunden Wegs kosten?

Bei einer kleinen Ueberlegung wird es dem Anfänger leicht seyn, jede Frage der Regel Dequinque nach diesen beiden Sätzen zu ordnen, und es ist nöthig, sich hierin zu üben, um sich die erforderliche Gewandtheit in Auflösung der hierhergehörigen Aufgaben zu erwerben.

Betrachtet man den Fragsatz, so ergibt sich, daß eines seiner beiden Glieder vorzüglich die Frage veranlaßt. Dieses Glied heiße das Fragglied. In dem vorigen Beispiele sieht man sogleich, daß die zu transportirenden 875 ℔ dieses Fragglied bilden, weil es darauf ankommt, die Transportkosten dieses Gewichts zu finden.

§. 248. Zusatz. I. Sollte man die Aufgabe des vorigen §. nach der obigen Vorschrift (§. 241.) auflösen, so entständen folgende Verhältnisse:

600 ℔ : 875 ℔ = 9 fl. : x fl., und
20 St. : 18 St. folglich würde nun

$600 \times 20 : 875 \times 18 = 9 : x$, oder $x \times 600 \times 20 = 875 \times 18 \times 9$, woraus der Werth für $x = \frac{875 \times 18 \times 9}{600 \times 20} = 11$ Gulden $48\frac{3}{4}$ Kreuzer gefunden wird.

II. In dem Ausdrucke: $x \times 600 \times 20 = 875 \times 18 \times 9$ stehen die Factoren in einer wagrechten Reihe neben einander. Ordnet man sie nun, nach beifolgendem Muster, zur Rechten und Linken eines gezogenen Senkstrichs, unter einander; nämlich:

x (Gulden)	875 (Pfunde)
600 (Pfunde)	18 (Stunden)
20 (Stunden)	9 (Gulden)

so sieht man sogleich, daß der Werth von x gefunden

wird, wenn man das Product aller Glieder zur Rechten mit dem Producte aller Glieder zur Linken dividirt.

III. Da diese Berechnung von x sehr bequem ist, so muß nur noch die Regel entwickelt werden, nach welcher die gegebenen Glieder zur Rechten und zur Linken des Senkstrichs zu ordnen sind. Diese Stellung der Glieder nennt man nun den Reesischen Ansatz.

§. 249. Aufgabe. Wenn die Glieder in der Regel Dequinque gerade Verhältnisse (§. 223.) bilden, dieselbe nach dem Reesischen Ansatze zu ordnen.

Auflösung. I. Man gebe der Frage eine solche Stellung der Sätze, daß der Bedingnißsatz (§. 247.) zuerst steht und der Fragsatz (§. 247.) auf ihn folget.

II. Nachdem ein Senkstrich gezogen worden ist, setze man das unbekannte Glied x oben zur Linken, und zur Rechten in gleicher Höhe das Fragglied (§. 247.). (Man sehe das unten folgende Beispiel.)

III. Unter das Fragglied setze man zuerst das in dem Fragsatze noch vorkommende andere Glied und sodann jenes Glied des Bedingnißsatzes, welches mit dem unbekannten Gliede x gleichartig ist.

IV. Unter das unbekannte Glied werden nun die noch in dem Bedingnißsatze gegebenen beiden andern Glieder gestellt. Dividirt man nun

V. Das Product aus den drei Zahlen zur Rechten des Senkstrichs durch das Product aus den beiden Zahlen zur Linken, so ist der Quotient der Werth von x.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Regeln fließt aus den bisherigen Sätzen (§. 247. und 248.), nach welchen sie gebildet worden sind, und bedarf demnach keiner weitern Auseinandersetzung. Folgende Beispiele dienen zur Erläuterung.

Beispiele. I. Wie viel werden 15 Menschen in 9 Monaten brauchen, wenn die Ernährung von 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden erfordert?

1) Nach Regel I. gebe man der Aufgabe folgende Stellung: Wenn 8 Menschen in 19 Monaten 4000 Gulden brauchen, wie viel bedürfen 15 Menschen in 9 Monaten?

2) Regel II. gibt dieses:

x (Gulden)	15 (Menschen)

3) Nach Regel III. wird folgendes beigefügt:

x (Gulden)	15 (Menschen)
	9 (Monate)
	4000 (Gulden)

4) Nach Regel IV. erhält man endlich den ganzen Ansatz:

x (Gulden)	15 (Menschen)
8 (Menschen)	9 (Monate)
19 (Monate)	4000 (Gulden)

5) Regel V. gibt endlich $x = \frac{15 \times 9 \times 4000}{8 \times 19} = 3552\frac{12}{19}$ Gulden, oder 3552 Gulden, 37 Kr. $3\frac{11}{19}$ Pf.

Nach der obigen allgemeinen Weisung (§. 241.) wäre der Ansatz dieser:

$$\left.\begin{matrix} 8 : 15 \\ 19 : 9 \end{matrix}\right\} = 4000 : x$$

woraus $x = \frac{15 \times 9 \times 400}{8 \times 19}$ wird, wie so eben auch gefunden worden ist.

II. Wie viele Zinsen wird ein Kapital von 2350 Gulden in 8 Jahren einbringen, wenn 1000 Gulden in 3 Jahren 250 Gulden Zinsen geben?

Nach Anwendung obiger Regeln entsteht folgender Ansatz der Glieder:

x (Zinsen)	3250 (Guld. Kap.)
1000 (Guld. Kap.)	8 (Jahre)
3 (Jahre)	250 (Guld. Zinsen.)

Dies gibt folglich $x = \frac{3250 \times 8 \times 250}{1000 \times 3} = \frac{325 \times 8 \times 25}{30} = \frac{325 \times 200}{30} = \frac{325 \times 20}{3} = \frac{6500}{3} = 2166\frac{2}{3}$ Gulden, oder 2166 Gulden 40 Kr.

Nach der frühern Regel (in §. 241.) wäre der Ansatz dieser:

$$\left.\begin{array}{l} 1000 : 3250 \\ 3 \quad : \quad 8 \end{array}\right\} = 250 : x$$

woraus für x derselbige Werth erhalten wird, wie zuvor.

§. 250. Zusatz. Wenn die Glieder nach dem Reesischen Ansatz geordnet sind, so kann man jede Zahl zur Linken des Senkstrichs gegen jede beliebige zur Rechten desselben mit einem gemeinsamen Divisor (wenn es sich thun läßt) ohne Rest aufdividiren, und hierdurch diese Glieder heben, wodurch der Werth von x nicht verändert wird, weil der Quotient derselbige bleibt, wenn man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl aufdividirt. Dieses Verfahren dienet hier ebenso zur bequemen Abkürzung der Rechnung, wie oben das Heben der Brüche, oder das Heben der Verhältnisse (§. 136. und 209.).

§. 251. Zusatz. Wenn Bruchglieder vorkommen, so kann man den Nenner jedes dieser Glieder dadurch sehr leicht wegschaffen, daß mit diesem weggelassenen Nenner irgend ein Glied jenseits des Senkstrichs multiplicirt wird. Denn es ist nun gerade so, als hätte man den Divisor und Dividenden mit der nämlichen Zahl multiplicirt, wodurch der Quotient unverändert bleibt. Man fragt. z. B. Wie viele Waare wird man für $8\frac{3}{4}$ Gulden erhalten, wenn man für $40\frac{1}{2}$ Gulden $64\frac{3}{4}$ Pfunde bekommt? Diese Aufgabe bildet eine Regel Detri und kann auch nach der Reesischen Regel aufgelöset werden. Der Ansatz ist:

x	$8\frac{3}{4}$	Die Bruchglieder eingerichtet,
$40\frac{1}{2}$	$64\frac{3}{4}$	gibt folgendes

x	$\frac{35}{4}$	Die Nenner 2 und 4 (von $\frac{35}{4}$)
$\frac{81}{2}$	$\frac{259}{4}$	weggebracht, gibt dieses

x	70	Den andern Nenner 4 ebenfalls,
324	$\frac{259}{4}$	so erhält man

x	70	Beiderseits mit 2 gehoben,
1296	259	gibt

x	35
648	259

woraus $x = \frac{35 \times 259}{648} = 13$ Pfunde, 31 Lothe, $2\frac{50}{81}$ Quentchen wird.

Als Proberechnung können die Anfänger diese Aufgabe nach dem obigen (§. 241.) Ansatze:

$$40\frac{1}{2} : 8\frac{3}{4} = 64\frac{3}{4} : x, \text{ oder}$$

$$\frac{81}{2} : \frac{35}{4} = \frac{259}{4} : x, \text{ oder}$$

$$81 \times 4 : 35 \times 2 = \frac{259}{4} : x, \text{ d. h.}$$

$$324 : 70 = \frac{259}{4} : x, \text{ oder}$$

$$1296 : 70 = 259 : x, \text{ oder}$$

$648 : 35 = 259 : x$ berechnen, welches ebenfalls $x = \frac{35 \times 259}{648}$ gibt.

§. 252. Zusatz. Wenn in der gegebenen Angabe (der Regel Dequinque) Glieder vorkommen, welche in einem verkehrten oder umgekehrten Verhältnisse (§. 223.) stehen, so werden dieselben (wie man sehr wohl bemerken muß) auch in verkehrter Ordnung zur Seite des

Senkstrichs gesetzt, d. h. jenes dieser Glieder, welches bei dem geraden Verhältnisse zur Rechten stände, wird nun auf die linke Seite gestellt und umgekehrt. Der Grund dieses Verfahrens ist aus den bisherigen Sätzen leicht einzusehen. Folgendes Beispiel soll es erläutern:

Zur Vollendung einer gewissen Arbeit sind 18 Menschen 10 Tage lang beschäftiget, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten. In wie viel Tagen werden 14 Menschen eben diese Arbeit, bei täglicher 12stündigen Arbeitszeit vollenden? Dieses gibt den Ansatz:

x (Tage)	18 (Menschen)
14 (Menschen)	8 (Stunden)
12 (Stunden)	10 (Tage) Wird hier mit

6 und 2 gehoben, so ist x	3
7	4
2	10, oder nochmals mit 2

gehoben, gibt x	3
7	4
1	5 folglich

$x = \frac{3 \times 4 \times 5}{7} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ Tage.

Der gewöhnliche Ansatz wäre dieser:

$$\left.\begin{array}{r} 14 : 18 \\ 12 : 8 \end{array}\right\} = 10 : x,$$ welches $x = \frac{18 \times 8 \times 10}{14 \times 12} =$

$\frac{1440}{168} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ gibt, wie zuvor.

Da hier sowohl die Zahl der Arbeiter, als auch die Menge der täglichen Arbeitsstunden im umgekehrten Verhältnisse der Vollendungszeit stehen, so mußten auch die Glieder in verkehrter Ordnung zur Rechten und Linken des Senkstrichs gesetzt werden. Es ist Anfängern sehr zu rathen, sich in dem Ansatze und in der Auflösung solcher Aufgaben zu üben. Die allgemeine Regel heißt:

Bei den geraden Verhältnissen hat der gewöhnliche Ansatz (§. 249.); bei verkehrten Verhältnissen aber der umgekehrte Ansatz Statt.

IV. Die gesellschaftliche Theilrechnung.

§. 253 Erklärung. Die Gesellschaftsrechnung (gesellschaftliche Theilrechnung) begreift jene Fälle unter sich, wo man a) entweder nach einer willkürlichen Annahme, oder b) aus Gründen der natürlichen Billigkeit eine gegebene Zahl in mehrere Theile zerlegen soll, welche in einem angegebenen Verhältnisse gegen einander stehen.

Erläuterungen hierüber.

Zu a). Es stirbt Jemand mit Hinterlassung eines Vermögens von 25000 Gulden und setzt drei Personen: A, B und C unter der Bedingung zu Erben ein, daß, wenn der A hievon 7 Gulden bekommt, der B immer 5 Gulden, und der C jedesmal 2 Gulden haben solle. Man fragt, wie viel wird jeder Erbe bekommen? Offenbar sucht man hier, um dem Willen des Verstorbenen Genüge zu leisten, drei Zahlen, welche sich gegen einander wie 7 : 5 : 2 verhalten und zusammengenommen genau = 25000 Gulden sind.

Zu b). Vier Handelsleute rüsteten ein Schiff mit Waaren aus, deren Werth sich auf 150000 Gulden belief. Der erste trug hierzu 60000 Gulden, der andere 30000 Gulden, der dritte 49000 Gulden und der vierte 11000 Gulden bei. Durch den Verkauf dieser Waaren gewannen sie eine Summe von 64900 Gulden. Wie groß wird der Gewinn jedes Einzelnen seyn? —

Weil es hier der natürlichen Billigkeit gemäß ist, daß der Gewinn im Verhältniß der Zulage stehen muß, so heißt die Aufgabe so viel, als: Man soll die Zahl 64900 in 4 Theile theilen, welche sich so gegen einander verhalten wie die vier einzelnen Zulagen der Kaufleute.

§. 254. Anmerkung. Die Auflösung aller Fälle, welche bei der gesellschaftlichen Theilrechnung vorkommen, beruht daher im Allgemeinen auf der Aufgabe, welche lehrt, wie eine gegebene Zahl in mehrere andere eingetheilt werden kann, welche zusammengenommen jener gleich sind, und in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen.

§. 255. Aufgabe. Jede gegebene Zahl in eine beliebige Menge von Theilen zu theilen, welche in einem bestimmten Verhältnisse gegen einander stehen und zusammengenommen jene erste Zahl wieder ausmachen.

Auflösung. I. Man bringe die Zahlen, welche das Verhältniß bestimmen, nach welchem die gegebene Zahl getheilt werden soll, d. h. die Verhältnißzahlen, in eine Summe.

II. Man schließe nun so: wie sich die Summe aller Verhältnißzahlen zu der zu theilenden Zahl verhält, eben so verhält sich jede dieser Verhältnißzahlen einzeln zu dem ihr entsprechenden Theile der zu theilenden Zahl.

III. Man bilde so viele dieser Proportionen (nach II.) als Verhältnißzahlen gegeben sind, bestimme in jeder derselben aus den drei ersten Gliedern (nach §. 218, I.) das vierte, so findet man nach und nach alle verhältnißmäßige Theile der zuerst gegebenen Hauptzahl.

Erläuterung und Beweis.

Man soll die Zahl 48 in zwei Theile theilen, welche sich wie 3 : 5 verhalten. Offenbar wird dieses geschehen, wenn man die 48 in 3 + 5, d. h. in 8 gleiche Theile eintheilt, und nachher einmal 3 und einmal 5 solcher erhaltenen Theile nimmt. Denn wenn z. B. die Zahl 8 nach dem Verhältniß von 3 : 5 zu theilen wäre, so wäre offenbar 3 der eine und 5 der andere dieser Theile. Wäre 2mal 8 oder 16 auf diese Weise zu theilen, so würde der eine Theil 2mal 3 oder 6, und der andere Theil 2mal 5

oder 10 seyn. Da nun hier 8 in der zu theilenden Zahl 48 gerade 6mal enthalten ist, so muß der eine verhältnißmäßige Theil 6mal 3 d. h. 18, der andere 6mal 5 d. h. 30 betragen. Auch verhält sich nunmehr $3 \times \frac{48}{8} : 5 \times \frac{48}{8} = 3 : 5$ (§. 208.). Auch ist ferner $3 \times \frac{48}{8} + 5 \times \frac{48}{8} = 8 \times \frac{48}{8} = 48$. Folglich sind hierdurch die beiden Bedingnisse der Aufgabe erfüllt, d. h. $\frac{3 \times 48}{8}$ und $\frac{5 \times 48}{8}$ sind die zwei zu suchenden Zahlen. Nun ist aber die erste dieser beiden Zahlen das vierte Glied der Proportion $8 : 48 = 3 : \frac{3 \times 48}{8} = \frac{144}{8} = 18$ (nach §. 218, I.) und die andere Zahl ist das letzte Glied der Proportion $8 : 48 = 5 : \frac{5 \times 48}{8} = \frac{240}{8} = 30$ (nach 218, I.). Ferner sind hier die drei ersten Glieder jene Zahlen, welche der obigen Auflösung (in II.) entsprechen. Folglich ist diese Auflösung richtig und die zu findenden Zahlen sind 18 und 30. Sie leisten auch der Aufgabe vollkommen Genüge, weil a) $3 : 5 = 18 : 30$, und ferner b) $18 + 30 = 40$ ist.

Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß diesem Beweise, obgleich er nur an einem einzelnen Falle geführt wurde, doch nichts an der erfoderlichen Allgemeinheit fehlt. Denn es wurden keine besondere Größen von Zahlen dabei vorausgesetzt. Daher gilt er von allen möglichen Zahlen, welche man sich vorstellen will. Desgleichen erhellet, daß sich derselbe auch keineswegs auf den Fall einschränkt, wo eine Zahl in zwei verhältnißmäßige Theile getheilt werden soll; sondern, daß man sich vielmehr eben der Gründe bedienen kann, um die Richtigkeit der Auflösung für jene Fälle zu zeigen, wo diese Zahl in irgend eine größere Menge von Theilen zerlegt werden soll, deren Verhältniß angegeben ist.

Beispiele. I. Die Zahl 468 soll in 3 Theile, welche sich wie 4 : 7 : 9 verhalten, eingetheilt werden. Die Proportionen zur Auflösung sind folgende:

a) $4 + 7 + 9 : 468 = 4 : x$, woraus $x = \frac{468 \times 4}{4 + 7 + 9} = \frac{1872}{20} = 93\frac{3}{5}$, ferner

b) $4 + 7 + 9 : 468 = 7 : y$, wo $y = \frac{468 \times 7}{4 + 7 + 9} = \frac{3276}{20} = 163\frac{4}{5}$, und endlich

c) $4 + 7 + 9 : 468 = 9 : z$, wo $z = \frac{468 \times 9}{4 + 7 + 9} = \frac{4212}{20} = 210\frac{3}{5}$ wird.

Diese gefundene drei Zahlen haben die Eigenschaft, daß

a) $93\frac{3}{5} : 163\frac{4}{5} : 210\frac{3}{5} = 4 : 7 : 9$ und daß

b) $93\frac{3}{5} + 163\frac{4}{5} + 210\frac{3}{5} = 468$ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann.

II. Sollte 468 in 4 Theile, welche sich wie 2 : 3 : 5 : 8 verhalten, eingetheilt werden, so sind die Proportionen hierzu diese:

a) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 2 : w$

b) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 3 : x$

c) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 5 : y$

d) $2 + 3 + 5 + 8 : 468 = 8 : z$, und man findet, wenn die Rechnung ausgeführt wird, $w = 52$; $x = 78$; $y = 130$ und $z = 208$, welches die verhältnißmäßigen Theile sind, in welche die Zahl 468 getheilt worden ist. Die Probe darüber ist leicht anzustellen. Denn es ist

a) $52 + 78 + 130 + 208 = 468$ und

b) $52 : 78 : 130 : 208 = 2 : 3 : 5 : 8$,

wie in der Aufgabe gefordert wurde.

§. 256. Auflösung der Beispiele in §. 253.

I. Um die Erbschaftstheile x, y und z des A, B und C zu bestimmen, muß man (nach §. 255.) folgende drei Proportionen auflösen:

a) $7 + 5 + 2 : 25000 = 7 : x$
b) $7 + 5 + 2 : 25000 = 5 : y$
c) $7 + 5 + 2 : 25000 = 2 : z$.

Aus a) wird $x = \frac{25000 \times 7}{7 + 5 + 2} = \frac{175000}{14} = 12500$ Guld. für A. Ferner

Aus b) ist $y = \frac{25000 \times 5}{7 + 5 + 2} = \frac{125000}{14} = 8928\frac{4}{7}$ Guld. für B, und

Aus c) ist $z = \frac{25000 \times 2}{7 + 5 + 2} = \frac{50000}{14} = 3571\frac{3}{7}$ Guld. für C.

Diese Werthe für x, y und z haben, wie man leicht durch eine Probe ersehen kann, die Eigenschaften, welche das obige Beispiel fodert. Es ist nämlich:

a) $12500 + 8928\frac{4}{7} + 3571\frac{3}{7} = 25000$ und ebenso auch

b) $12500 : 8928\frac{4}{7} : 3571\frac{3}{7} = 7 : 5 : 2$.

II. Wenn die vier Kaufleute A, B, C und D, und die zu suchenden Gewinne eines jeden (dieser Reihe nach) w, x, y und z heißen, so bekommt man, nachdem die Zuschüsse Aller in eine Summe gebracht worden, folgende vier Proportionen:

a) $150000 : 64900 = 60000 : w$, oder $15 : 64900 = 6 : w$ (§. 212, I.), woraus $w = \frac{64900 \times 6}{15} = 25960$ Gulden wird; ferner

b) $150000 : 64900 = 30000 : x$, oder $15 : 64900 = 3 : x$ (§. 112, I.), woraus $x = \frac{64900 \times 3}{15} = 12980$ Gulden wird; sodann

c) $150000 : 64900 = 49000 : y$, oder $150 : 64900 = 49 : y$ (§. 212, I.), woraus $y = \frac{64900 \times 49}{150} = 21200\frac{2}{3}$ Gulden wird, und endlich

d) $150000 : 64900 = 11000 : z$, oder $150 : 64900 = 11 : z$ (§. 212, I.), woraus $z = \frac{64900 \times 11}{150} = 4759\frac{1}{3}$ Gulden wird.

Von der Richtigkeit dieser Zahlen kann man sich wieder durch die bekannte Probe sehr leicht überzeugen.

§. 257. Anmerkung. Man kann sich bei diesen Rechnungen der Mühe überheben, die letzte Proportion besonders aufzulösen, wenn man eine Summe aus allen bereits schon gefundenen vierten Gliedern macht, und dieselbe von der einzutheilenden Zahl abzieht. Der hierdurch entstehende Rest ist das vierte Glied der letzten Proportion. So wird eine Summe von den (in §. 256, II.) gefundenen Werthen für w, x und y, oder $25960 + 12980 + 21200\frac{2}{3} = 60140\frac{2}{3}$. Und $64900 - 60140\frac{2}{3} = z = 4759\frac{1}{3}$, wie daselbst durch die Auflösung der Proportion gefunden wurde. Jedoch muß man, um sich dieses Mittels mit Vortheil bedienen zu können, überzeugt seyn, daß in den ersten Proportionen keine Rechnungsfehler begangen worden sind. Denn wenn dieses wäre, so würden dieselben den durch die Subtraction gefundenen Werth ebenfalls unrichtig machen, und die gewöhnliche Probe reichte nicht hin, diese Unrichtigkeit zu entdecken.

§. 258. Anmerkung. I. Die fernere Anwendung der bisher vorgetragenen Regeln auf die im gemeinen Leben häufig vorkommenden Fälle könnte man hier, wenn nicht zu befürchten wäre, zu weitläufig zu werden, durch viele Beispiele zeigen. Da sich aber Sammlungen solcher Aufgaben in besondern Büchern finden und es nebst diesem auch keine Schwierigkeit ist, sich selbst dergleichen zu entwerfen, so überläßt man diese Uebung dem Anfänger.

II. Ganz auf ähnliche Weise, wie bisher der Gewinn, muß bisweilen der Verlust berechnet werden. Von drei Kaufleuten: A, B und C, gab A eine Summe von 350 Gulden, B von 275 Gulden und C von 190 Gulden zu einem gemeinschaftlichen Handel. Sie hatten das Unglück, 120 Gulden dabei zu verlieren. Wieviel beträgt der Verlust eines jeden? Hier ist:

a) $350 + 275 + 190 : 120 = 350 : x$

b) $350 + 275 + 190 : 120 = 275 : y$

c) $350 + 275 + 190 : 120 = 190 : z$

wo x den Verlust des A, y jenen des B und z jenen des C angibt, welche Werthe nunmehr leicht zu berechnen sind.

§. 259. Erklärung. Der Werth eines Kapitals hängt nicht allein von seiner absoluten Größe, sondern zugleich von der Zeit ab, während welcher es zur Betreibung eines gemeinschaftlichen Handels verwendet wird. Es erhellet zugleich, daß eine und die nämliche Summe in der doppelten Zeit den zweifachen, in der dreifachen Zeit den dreifachen Gewinn u. s. w. eintragen werde, d. h. es ergibt sich, daß der Verhältnißwerth eines Kapitals durch ein Product aus der absoluten Größe desselben in die Zeit, während welcher dasselbe zu diesem Geschäfte angelegt ist, bestimmt werden müsse. Dieses gibt Veranlassung zur folgenden Aufgabe.

§. 260. Aufgabe. A, B und C treten in einen Gesellschaftshandel. Der A erlegte 2000 Gulden und ließ sie 6 Monate in der gemeinschaftlichen Kasse. Der B schoß gleich anfangs 3500 Gulden, welche 7 Monate im Handel blieben. Der C endlich gab 1850 Gulden und diese waren 9 Monate in der Handlung. Der gemeinschaftliche Gewinn war 1400 Gulden. Wie viel bekommt jeder Einzelne davon?

Auflösung. Nach §. 259. ist der Verhältnißwerth der Zulage des A $= 2000 \times 6 = 12000$, jener des B $= 3500 \times 7 = 24500$ und endlich der des C $= 1850 \times 9 = 16650$. Die Summe dieser drei Producte ist $= 53150$; daher entstehen nunmehr folgende drei Proportionen hieraus:

a) $53150 : 1400 = 12000 : x$, dem Gewinne des A,

b) $53150 : 1400 = 24500 : y$, dem Gewinne des B,

und endlich

c) $53150 : 1400 = 16650 : z$, dem Gewinne des C.

Die Rechnung gibt demnach:

$$x = \frac{1400 \times 12000}{53150} = 316\tfrac{460}{5315} \text{ Gulden,}$$

$$y = \frac{1400 \times 24500}{53150} = 645\frac{1825}{5315}$$ Gulden, und

$$z = \frac{1400 \times 16650}{53150} = 438\frac{3030}{5315}$$ Gulden.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht theils auf dem §. 259, theils auf §. 255.

§. 261. Anmerkung. Die Auflösung der Aufgabe des vorigen §. dient zum Muster, wie man sich in dergleichen Fällen zu verhalten habe. Oft kommen zusammengesetztere Fragen vor, wenn ein oder das andere Mitglied der Gesellschaft nach Ablauf einer gewissen Zeit entweder ein neues Kapital hinzuschießt, oder einen Theil des bereits erlegten wieder hinwegnimmt, oder eine solche Abänderung öfters wiederholt. Folgende Aufgabe wird dieses mehr erläutern.

§. 262. Aufgabe. A, B und C treten in einen gemeinschaftlichen Handel. Der A schoß hierzu 3000 Guld. in die Gesellschaftscasse. Nach Verlauf von 6 Monaten nimmt er wieder 1000 Guld. heraus, und nach 8 Monaten, vom Ablauf der ersten 6 Monate gerechnet, gibt er noch 500 Guld. zum Handel. Der B erlegte gleich anfangs eine Summe von 4500 Guld. und schoß nach 10 Monaten noch 500 Guld. hinzu. Der C endlich gab 2500 Guld. und ließ sie 24 Monate lang, d. h. bis zur ganzen Dauer des Geschäftes, in der Handlung. Mit diesen einzelnen Zulagen gewannen sie eine Summe von 3560 Guld. Wie viel beträgt der Gewinn jedes Einzelnen?

Auflösung. I. Die 3000 Guld. des A blieben 6 Monate in der Handlung; folglich ist (nach §. 259.) der verhältnißmäßige Werth dieses Kapitals $= 3000 \times 6 = 18000$. Nun kamen 1000 Guld. von diesen 3000 hinweg; daher blieben noch 2000 Guld. übrig, welche 8 Monate ohne Veränderung im Handel waren, deren Werth also $= 16000$ ist. Endlich kamen noch 500 Guld. hinzu, wodurch aus den 2000 Guld. nunmehr 2500 Guld. wurden, deren Werth, da sie noch 10 Monate bei der Handlung blieben, $= 2500 \times 10 = 25000$ ist. Der

ganze verhältnißmäßige Zuschuß des A ist daher = 18000 + 16000 + 25000 = 59000.

II. Der B gab sogleich 4500 Guld., welche 10 Monate im Handel blieben, deren Werth also = 45000 ist (§. 259.). Nun erlegte er noch 500 Guld., wodurch 4500 + 500 = 5000 Guld. in der Handlung waren, welche, da sie noch 14 Monate in der Casse blieben, einen Werth von 5000 × 14 = 70000 hatten. Der Antheil des B betrug also 45000 + 70000 = 115000.

III. Der C endlich gab 2500 Guld. und ließ sie bis zu Ende des Geschäftes, d. h. 24 Monate lang im Handel. Daher ist der Werth dieser Zulage = 2500 × 24 = 60000.

IV. Die fernere Auflösung dieser Aufgabe beruht nun darauf, daß der gemeinschaftliche Gewinn von 3560 Guld. in drei Theile getheilt wird, die sich wie 59000 : 115000 : 60000 oder, welches einerlei ist (§. 212.), wie 59 : 115 : 60 verhalten. Diese Rechnung (nach §. 255.) ausgeführt, gibt einen Gewinn für A = $897\frac{71}{117}$ Guld.; für den B = $1749\frac{67}{117}$ Guld., und für C = $912\frac{96}{117}$ Gulden, deren Richtigkeit leicht geprüft werden kann.

Der Beweis über die Richtigkeit dieser Auflösung beruht auf den Sätzen in §§. 255—260.

§. 263. Anmerkung. Um die Größe des verhältnißmäßigen Zuschusses von A (in §. 262.) zu bestimmen, könnte man auch so schließen: Wenn die 3000 Gulden während der 24 Monate des gemeinschaftlichen Handels nicht vermehrt oder vermindert worden wären, so hätten sie am Ende dieser Zeit offenbar einen Werth = 3000 × 24 = 72000. Weil nun aber nach Ablauf von 6 Monaten 1000 Gulden davon hinweggenommen wurden, so nahm man diese 1000 Gulden um 24 — 6 = 18 Monate länger in der Handlung an, als sie es eigentlich seyn können, wenn man den ganzen Verhältnißwerth = 72000 setzt. Nun ist aber der Werth von 1000 Gulden in 18 Monaten = 18000, folglich ist 72000 — 18000 = 54000 der Werth jenes Geldes, welches der A bis hierher erlegte. Allein nach 14 Monaten schoß A noch 500 Gulden

zu, welche 24 — 14 oder 10 Monate in der Handlung geblieben sind, deren Werth also = 5000 ist. Dieser, zu dem obigen gesetzt, gibt 54000 + 5000 = 59000 für den ganzen verhältnißmäßigen Zuschuß des A, wie oben §. 262, I — Erläuterungen wie diese sind dem Anfänger sehr nützlich, indem sie ihn sowohl mit den Bedingnissen als mit der Auflösung dieser Aufgabe um so mehr bekannt machen.

V. Die Vermischungsrechnung.

§. 264. Erklärung. Die Vermischungsrechnung faßt jene Fälle in sich, wo entweder a) aus der Menge und dem Preise verschiedener zu vermischenden Dingen der Preis des aus ihnen zusammengemischten Körpers überhaupt, oder eines bestimmten Theils desselben; oder b) die verhältnißmäßige Hergabe mehrerer zu vermischenden Dinge gesucht wird, deren Preis (für ein bestimmtes Maß) angegeben ist, um hieraus einen Körper, der, bei bestimmter Größe, einen gegebenen Mittelpreis hat, zu erhalten.

Erläuterung zu a). Ein Wirth mischt 8 Maß 10 Batzen-Wein, 12 Maß 15 Batzen-Wein und 9 Maß 12 Batzen-Wein zusammen. Man soll entweder den Werth des ganzen Gemisches, oder einer Maß des gemischten Weines finden.

Zu b). Man will aus zwei Weingattungen, von deren einem die Maß 18 Batzen, von dem andern aber 12 Batzen kostet, einen Wein so zusammenmischen, daß eine Maß des Gemisches 16 Batzen werth seyn soll. Wie viel muß jede Gattung dazu hergeben?

§. 265. Aufgabe. Der Werth eines gewissen Maßes von mehreren zusammen zu mischenden Dingen und die Menge dieser Maße für jeden derselben ist gegeben. Man soll hieraus den Werth der ganzen Mischung, oder eines bestimmten Theils derselben finden.

Auflösung. I. Man multiplicire den Werth eines Maßes von jedem der gegebenen Körper mit einer Zahl, welche die Menge der in ihm enthaltenen Maße angibt.

II. Alle diese einzelnen Producte in I. bringe man in eine Summe, so ist diese der Werth des ganzen Gemisches.

III. Wird aber diese Summe in II. durch die Menge der Maße aller gegebenen Dinge dividirt, so ist der hieraus entstehende Quotient der Werth eines Maßes vom Gemische.

IV. Um den Werth eines bestimmten Theils vom Gemische zu finden, multiplicire man die Summe in II. mit einem Bruche, welcher diesen Theil ausdrückt.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht theils auf dem Begriffe, theils auf den Anwendungen der Multiplication und Division und bedarf demnach keiner weitern Rechtfertigung.

Beispiele.

I. Auflösung des Beispiels in §. 264, a.

Der Werth des 10 Batzen-Weins, welcher zur Mischung kommt, ist, da man 8 Maße von demselben nimmt, $= 8 \times 10 = 80$ Batzen. Eben so jener der 12 Maße des 15 Batzen-Weins $= 12 \times 15 = 180$ Batzen. Endlich jener der 9 Maße vom 12 Batzen-Wein $= 9 \times 12 = 108$ Batzen. Weil nun das Gemische nur aus diesen drei Weinen besteht, so ist offenbar der Werth der ganzen Mischung $= 80 + 180 + 108 = 368$ Batzen. Allein dieses Gemische enthält nun auch $8 + 12 + 9 = 29$ Maße; daher ist der Werth einer Maß des gemischten Weines $= \frac{368}{29} = 12\frac{20}{29}$ Batzen $= 12$ Batz. 2 Kr. $3\frac{1}{29}$ Pf.

Wollte man den Werth irgend eines bestimmten Theils der Mischung, z. B. jenen des $\frac{2}{3}$ Theils finden, so wäre dieser $= 368 \times \frac{2}{3} = \frac{736}{3} = 245\frac{1}{3}$ Batzen u. s. w.

II. Man vermengt drei Gattungen von Früchten. Von der ersten, wovon das Malter 5 Gulden kostet, nimmt man 12 Malter; von der zweiten, wovon das Malter 7 Gulden gilt, nimmt man 18 Malter, und von der dritten, wovon ein Malter 9 Gulden kostet, nimmt man 10 Malter. Wie viel wird das ganze Gemenge, und ein Malter desselben werth seyn? Hier ist

$5 \times 12 = 60$ Gulden der Werth der 1sten Gattung.
$7 \times 18 = 126$ Gulden — 2ten —
$9 \times 10 = 90$ Gulden — 3ten —

folglich 276 Gulden der Werth des ganzen Gemenges; und, da $12 + 18 + 10 = 40$ Malter im Ganzen vorhanden sind, der Preis eines Malters vom Gemenge $= \frac{276}{40} = 6\frac{9}{10}$ Gulden = 6 Gulden 54 Kr.

§. 266. Anmerkung. I. Diese Rechnung hat auch eine besondere Anwendung bei Vermischung der Metalle. Um aber die hieher gehörigen Aufgaben verständlich zu machen, muß Folgendes vorbemerkt werden. Wenn ein Metall, z. B. Gold oder Silber, ohne alle fremdartige Theile ist, so heißt es rein. Wird hingegen ein anderes Metall beigemischt, (um dem ersten eine größere Stärke zu geben) so nennt man dieses beigeschmolzene Metall den Zusatz. So kommt, aus der eben bemerkten Ursache, zu dem Silber ein Zusatz von Kupfer, um demselben eine stärkere Dauer zu geben. Das Silber erhält nach diesem einen größern oder geringern Werth, je nachdem die Menge des Zusatzes, bei einerlei Gewicht, kleiner oder größer ist. Man nennt 16 Loth reines Silber eine Mark und das reine Silber bekommt den Namen sechszehnlöthig. Kommen unter 16 Lothe Gewicht nur 15 Lothe reines Silber und ein Loth Kupfer als Zusatz, so heißt das Silber fünfzehnlöthig. Sind bei 14 Lothe reinem Silber zwei Lothe Kupfer, so ist es vierzehnlöthig. So gibt es 13, 12, 11, 10löthiges Silber, wobei immer die Zahl des löthigen die Menge des reinen Silbers; die Unterschiede dieser Zahl von 16 Lothen hingegen die Kupfertheile angeben, welche in den 16 Lothen gemischten Silbers enthalten sind. — Reines Gold d. h. solches, welches frei von allen fremdartigen Beimischungen ist, heißt 24karatig. Enthalten nun 24 Gewichtstheile nur 23 Theile reinen Goldes und 1 solchen

Theil als Zusatz (von Silber oder Kupfer) so nennt man es 23karatiges Gold u. s. w.

II. Ferner bemerke man, daß mehrere Silbermassen von verschiedener Löthigkeit, wenn dieselben zusammengeschmolzen werden, eine ganz neue Silbermischung bilden, worin die Kupfertheilchen mit jenen des Silbers auf das Innigste und Feinste so verbunden sind, daß man weder ein Theilchen des reinen Kupfers, noch eines des reinen Silbers zu erkennen im Stande ist. Daher ist dieses eine eigentliche Mischung. Bei der Vermengung (verschiedener Fruchtsorten z. B.) kann jedes einzelne Körnchen der einen von jedem der andern unterschieden werden. Die Vermischungsrechnung begreift demnach auch alle Fälle unter sich, bei welchen eine bloße Vermengung statt findet.

§. 267. Aufgabe. Wie viellöthig wird eine Mischung seyn, welche aus 12 Lothen 10löthigem, aus 8 Lothen 12löthigem, aus 15 Lothen 13löthigem und aus 10 Lothen 14löthigem Silber besteht?

Auflösung. In dem 10löthigen Silber sind 10 Theile reines Silber und 6 Theile Zusatz (§. 266.); folglich werden die 12 Lothe dieses Silbers $12 \times 10 = 120$ Theile reines Silber geben. Eben so sind in den 8 Lothen des 12löthigen Silbers $8 \times 12 = 96$, in den 15 Lothen des 13löthigen Silbers $15 \times 13 = 195$ und in den 10 Lothen des 15löthigen $10 \times 15 = 150$ Theile von reinem Silber enthalten. Daher wird die Summe des ganzen Gemisches $120 + 96 + 195 + 150 = 561$ reine Silbertheile geben. Allein die Mischung besteht aus $12 + 8 + 15 + 10 = 45$ Lothen Silber. Folglich kommen auf 1 Loth nur $\frac{561}{45} = 12\frac{21}{45}$ Theile von reinem Silber, oder das aus dieser Mischung entstandene Silber ist $12\frac{21}{45}$ oder $12\frac{7}{15}$löthig.

Die Richtigkeit dieser Auflösung beruht, außer dem vorhin (§. 266.) bemerkten, größtentheils auf den gemeinen Begriffen der Multiplication und Division. Daher ist ein besonderer Beweis hierüber entbehrlich.

§. 268. Anmerkung. Die Aufgaben, wovon jene in vorigem §. ein Muster ist, können auch dergestalt aufgelöset werden, daß man die Menge der Kupfertheile bestimmt, welche in der ganzen Mischung enthalten seyn müssen. So sind die Theile des Kupfers, welche in den Silbergattungen des vorigen §. angegeben wurden, in der dortigen Ordnung, diese: Die 12 Lothe enthalten $12 \times 6 = 72$, die 8 Lothe geben $8 \times 4 = 32$, die 15 Lothe enthalten $15 \times 3 = 45$ und die 10 Lothe haben $10 \times 1 = 10$ Theile davon. Aber die ganze Zusammenmischung besteht aus 45 Lothen. Daher enthält ein Loth derselben $\frac{159}{45} = 3\frac{24}{45}$ Kupfertheile. Eine Probe von der Richtigkeit dieser Auflösung ist, daß $16 - 3\frac{24}{45} = 12\frac{21}{45}$ Theile reines Silber geben, wie im vorigen §.

§. 269. Aufgabe. Zwei Materien A und C, welche, für einerlei bestimmtes Maß, die Preise a und c haben, sollen dergestalt zusammengemischt werden, daß der hieraus entstehende vermischte Körper B, von dem nämlichen Maße, einen Mittelpreis b bekommt; wobei noch angenommen wird, daß b von a und von c um gleichviel unterschieden ist. Wie groß ist die Hergabe eines jeden der zu vermischenden Dinge?

Auflösung. Man nehme von jedem der zu vermischenden Körper gleichviel, d. h. die Hälfte von der Größe des zu findenden Körpers, so entsteht der gesuchte Körper B von der verlangten Größe und vom verlangten Mittelpreise $= b$.

Beweis. Nach der Annahme der Aufgabe ist $a - b = b - c$, d. h. der Werth eines Maßes des Körpers A ist um so viel größer, als der von B, um wie viel der Preis eines Maßes von C kleiner, als der von B ist. Hier sind also zwei gleiche Differenzen, folglich auch (§. 186.) zwei gleiche arithmetische Verhältnisse und es besteht eine arithmetische Proportion (§. 187.). Folglich ist auch $a + c = b + b = 2\,b$ (§. 197, II.) und $\frac{a + c}{2} = b$ (§. 200.), oder

$\frac{a}{2} + \frac{c}{2} = b$. Daher wird der Mittelpreis herauskommen, wenn man die Hälften des höhern und des niedern zusammennimmt. Allein von $\frac{1}{2}$ A ist auch der Preis einer Maß $= \frac{a}{2}$ und von $\frac{1}{2}$ B ist derselbe $= \frac{b}{2}$. Folglich ist die Auflösung richtig.

Daß man in der obigen Aufgabe anstatt bestimmter Zahlen die lateinischen Buchstaben setzte, geschah deswegen, um den Beweis dadurch allgemein zu machen. Denn man sieht wohl, daß ein Buchstabe, als willkührliches Zeichen, jede Größe, folglich auch jede Zahl vorstellen kann. Anwendungen auf besondere Fälle zeigen folgende Beispiele:

I. Von einem Weine, wovon die Maß 10 Batzen, und von einem andern, wovon eine Maß 18 Batzen kostet, soll eine Maß zusammengemischt werden, welche 14 Batzen werth ist. — Hier gibt, nach der Auflösung, jede Weingattung eine halbe Maß zum Gemische, wie dieses auch schon an und für sich Jedem einleuchtet, der nur den Sinn dieser Aufgabe versteht. Es ist daher in diesem Falle $\frac{10}{2} + \frac{18}{2} = 5 + 9 = 14$.

II. Von zwei Fruchtgattungen, deren erste im Scheffel 7 Gulden, deren andere im Scheffel 11 Gulden kostet, soll ein Scheffel zusammengemischt werden, welcher 9 Gulden werth ist. Weil nun auch wieder die beiden Preise 7 und 11 von dem Mittelpreise 9 gleich weit entfernt sind, indem $9 - 7 = 11 - 9$ ist, so gibt jede Fruchtgattung einen halben Scheffel, wodurch der gemischte Scheffel einen Werth von $\frac{7}{2} + \frac{11}{2} = \frac{18}{2} = 9$ Gulden bekommt, wie es die Aufgabe fodert.

§. 270. Zusatz. Sollte der Fall eintreten, daß man in §. 269. anstatt 1 Maß, irgend eine bestimmte Menge von Maßen zusammenmischen müßte, so ist begreiflich,

daß jede Gattung hierzu ebenfalls die Hälfte dieses Ganzen hergeben müßte. Wenn man z. B. aus 12 Batzen-Wein und aus 18 Batzen-Wein eine Mischung von 25 Maßen 15 Batzen-Wein machen sollte, so müßte jede Gattung $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ Maß hergeben. Nun hätte man $\frac{25}{2} \times 12 + \frac{25}{2} \times 18 = 25 \times 6 + 25 \times 9 = 150 + 225 = 375$. Und wirklich ist auch $15 \times 25 = 375$. — Aehnliche Auflösungen haben Statt, wenn andere Dinge auf diese Art vermischt oder vermengt werden sollen.

§. 271. Aufgabe. Zwei Körper, A und C, deren Preise, bei einerlei bestimmtem Maße, a und c sind, wo $a > c$ angenommen wird, sollen so vermischt werden, daß daraus ein Körper B von dem nämlichen Maße entsteht, der einen Mittelpreis b hat, welcher um ungleich viel von a und c entfernt ist. Wie groß ist die Hergabe von A und von C?

Auflösung. Man suche die Differenzen $a-b$ und $b-c$, betrachte dieselbe als die Zähler zweier Brüche, deren Nenner die Summe dieser Differenzen, oder $(a-b) + (b-c)$ d. h. $a-b+b-c$, oder (weil hier die Zahl b sowohl abgezogen, als auch addirt wird) $= a-c$ ist (§. 33, V.), so entstehen die Brüche $\frac{a-b}{a-c}$ und $\frac{b-c}{a-c}$. Verwechselt man nun diese Brüche, so wird $\frac{b-c}{a-c}$ die Hergabe des Körpers A, und $\frac{a-b}{a-c}$ jene des Körpers C zur Mischung seyn.

Beweis. Weil die Hergabe des Körpers A $= \frac{b-c}{a-c}$ seyn soll, so ist der ganze Werth derselben offenbar $= \frac{b-c}{a-c} \times a = \frac{(b-c) \times a}{a-c} = \frac{a \times b - a \times c}{a-c}$ (nach §. 128.), und da die Hergabe des Körpers C =

$\frac{a - b}{a - c}$ seyn soll, so wird ihr gesammter Werth in der Vermischung $= \frac{a - b}{a - c} \times c = \frac{a \times c - b \times c}{a - c}$ (nach §. 128.). Folglich wäre nunmehr die Summe der beiden Hergaben, d. h. der Werth des ganzen Gemisches $= \frac{a \times b - a \times c + a \times c - b \times c}{a - c}$ (§. 150, I.). Da aber in dem Zähler dieses Bruches das Product $a \times c$ sowohl abgezogen, als addirt wird, so fällt es gänzlich hinweg, und der Werth der Mischung ist $= \frac{a \times b - b \times c}{a - c}$ (§. 33, V.) $= \frac{(a - c) \times b}{a - c} = b$ (§. 36, VI.). Allein der Werth des gemischten Körpers sollte auch nach der Foderung der Aufgabe $= b$ seyn. — Folglich ist durch diese Auflösung die Größe jeder Hergabe richtig bestimmt worden. — Ferner muß die Summe dieser Hergaben $= 1$ seyn, und wirklich ist auch hier $\frac{a - b}{a - c} + \frac{b - c}{a - c} = \frac{a - b + b - c}{a - c}$ (§. 150, I.) $= \frac{a - c}{a - c}$ (weil b sowohl subtrahirt als addirt wird) $= 1$ (§. 119, I.). — Daher ist die ganze obige Auflösung richtig.

Beispiele. I. Aus zwei Weingattungen, wovon die eine Maß 12 Batzen und die andere 20 Batzen kostet, soll eine Maß zusammengemischt werden, welche 15 Batzen werth ist. Wie viel muß von jeder genommen werden? — Hier ist $20 - 15 = 5$, ferner $15 - 12 = 3$, endlich auch $20 - 12 = 8$; folglich die Hergabe des 12 Batzen-Weines $= \frac{5}{8}$ und jene des 20 Batzen-Weines $= \frac{3}{8}$. Beide Werthe erfüllen auch die Foderungen der Aufgabe. Denn der Werth der Summe der Hergaben von beiden Weinen ist $\frac{5}{8} \times 12 + \frac{3}{8} \times 20 = \frac{60}{8} + \frac{60}{8} =$

$\frac{120}{8} = 15$ Batzen, und die Summe der Hergaben selbst ist $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$.

II. Wie viel muß von einer Fruchtgattung, wovon ein Scheffel 7 Gulden und von einer andern, von welcher ein Scheffel 13 Gulden kostet, genommen werden, um einen Scheffel zu bekommen, welcher 9 Gulden werth ist? — Die Unterschiede sind $9 - 7 = 2$, ferner $13 - 9 = 4$ und $13 - 7 = 6$. Daher gibt die wohlfeilere Fruchtgattung $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ und die andere $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Nach dieser Hergabe ist auch wieder $\frac{2}{3} \times 7 + \frac{1}{3} \times 13 = \frac{14}{3} + \frac{13}{3} = \frac{27}{3} = 9$ Gulden. Desgleichen ist $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ Scheffel.

III. Man soll aus 10löthigem und aus 15löthigem Silber 12löthiges zusammenmischen. Wie viel muß jede Sorte hergeben, um 1 Loth gemischtes Silber zu bekommen? Die Differenzen sind hier $12 - 10 = 2$, ferner $15 - 12 = 3$ und $15 - 10 = 5$. Daher kommen von dem 10löthigen Silber $\frac{3}{5}$ Lothe und von dem 15löthigen nur $\frac{2}{5}$ Lothe zur Mischung von einem Lothe. Nun geben aber die $\frac{3}{5}$ Lothe vom 10löthigen Silber $\frac{3}{5} \times 10 = \frac{30}{5} = 6$ Theile reines Silber und die $\frac{2}{5}$ vom 15löthigen enthalten $\frac{2}{5} \times 15 = \frac{30}{5} = 6$ Theile reines Silber. Daher sind in dem gemischten (einen) Lothe $6 + 6 = 12$ reine Silbertheile enthalten, und dieses gemischte Silber ist 12löthig (§. 266, I), wie es die Aufgabe fodert.

§. 272. Zusatz. Wenn der Fall Statt hat, daß man bei den Aufgaben in §. 271. irgend eine bestimmte größere Menge des Gemisches und folglich die einzelnen Hergaben hierzu finden sollte, so suche man zuerst nach §. 271. die besondern Hergaben für die Einheit des Gemisches und multiplicire jede derselben mit der angegebenen Größe des

ganzen Gemisches, so zeigen die beiden Producte die Hergaben zur ganzen Mischung an. Wenn man z. B. in dem I. Beispiele des §. 271. eine Menge von 80 Maßen Wein zusammenmischen wollte, so würde die Hergabe des 12 Batzen-Weines $= \frac{5}{8} \times 80 = \frac{400}{8} = 50$ Maße und jene des 20 Batzen-Weines $= \frac{3}{8} \times 80 = \frac{240}{8} = 30$ Maß seyn. Und hier ist wieder $50 + 30 = 80$, so wie auch $50 \times 12 + 30 \times 20 = 600 + 600 = 1200 = 80 \times 15$ ist.

§. 273. Anmerkung. Aus dem Bisherigen ergibt sich für die Auflösung der Aufgabe in §. 271. folgende Regel: Man ziehe von dem höhern Preise den Mittelpreis und von dem Mittelpreise den niedern ab, so bestimmen diese Unterschiede, in der genannten Ordnung, die verhältnißmäßigen Hergaben des Körpers von dem geringern und höhern Werthe zur Mischung, wo dann auch nach den Regeln der Gesellschaftsrechnung (§. 253.) die wirkliche Hergabe für eine bestimmte Größe der Mischung leicht gefunden werden kann.

§. 274. Anmerkung. Nebst den bisherigen Aufgaben kommen öfters Fälle vor, wo aus drei oder mehreren angegebenen Preisen ein gewisser Mittelpreis gefunden werden soll. Obgleich nun diese Aufgaben eigentlich zur Algebra gehören, so können dieselben dennoch durch die bisherigen Regeln auf mehrfache Art aufgelöset werden. Folgendes Beispiel soll dieses erläutern. — Aus drei Weinsorten, wovon eine Maß 60 Kr., 50 Kr. und 48 Kr. kostet, soll eine Mischung gemacht werden, von welcher die Maß 54 Kr. werth ist. — Man bemerke folgende Auflösungsweisen:

1) Aus dem 60er und 50er mische man, durch gleiche Hergabe von jedem, einen 55er, und nun aus dem 55er und 48er, durch Hergaben, die sich umgekehrt wie 1 : 6 verhalten (§. 271.) den verlangten 54er; oder

2) Man mische aus dem 60er und 50er einen 58er, durch das Verhältniß der Hergaben wie 8 : 2, d. h. wie 4 : 1, und hierauf aus dem 58er und 48er den 54er, durch Hergaben, die sich wie 6 : 4, d. h. wie 3 : 2 verhalten oder

3) Man bilde aus dem 50er und 48er zuerst einen 49er durch das Verhältniß der Hergaben wie 1 : 1. Nach diesem mische

man aus dem erhaltenen 49er und aus dem gegebener 60er, nach dem Verhältniß von 6 : 5, den zu bildenden 54er.

4) Daß noch mehrere andere Auflösungsarten möglich seien (von welchen man jene wählen kann, welche zur wirklichen Anwendung die zweckmäßigsten scheinen) ergibt sich hieraus von selbst.

VI. Die Kettenregel.

§. 275. Erklärung. Zur Kettenregel gehören jene Aufgaben, wo man das unbekannte Verhältniß einer gegebenen Größe zu einer andern gegebenen durch mehrere (und oft viele) bekannte Zwischenverhältnisse bestimmen soll. Man will z. B. das Verhältniß des Reichsthalers zur Ducate finden und weiß, daß sich der Reichsthaler zum Kopfstücke wie 9 : 2, das Kopfstück zum Gulden wie 1 : 3 und der Gulden zur Ducate wie 1 : 5 verhalte.

§. 276. Zusatz. Aus dieser Erklärung folgt:

I. Daß aus dem gegebenen Verhalten bekannter Größen das unbekannte Verhältniß zweier angegebenen Dinge berechnet werden soll. In §. 275. ist es das Verhältniß des Reichsthalers zur Ducate, aus den dortigen angegebenen Mittelverhältnissen; ferner

II. Daß in dem ersten Verhältnisse der ersten Proportion das zweite Glied das nämliche ist, welches als erstes Glied in dem ersten Verhältnisse der zweiten Proportion steht. Daß ferner das zweite Glied dieses Verhältnisses wieder als erstes in die folgende Proportion kommt, und so weiter, wodurch nun die beiden Dinge, deren Verhältniß man sucht, als erstes Glied der ersten und als zweites Glied der letzten Proportion vorkommen. Will man die Proportionen in §. 275. nach dieser Bestimmung ordnen, so stehen sie so:

Reichsthaler	: Kopfstück	=	9 : 2
Kopfstück	: Gulden	=	1 : 3
Gulden	: Ducate	=	1 : 5

§. 277. **Aufgabe.** Eine allgemeine Weisung zu geben, wie die bei der Kettenregel vorkommenden Fälle zu berechnen sind.

Auflösung und Beweis.

I. Das zu bestimmende Verhältniß sei a : f (wo man sich, wie in §. 269. unter diesen Buchstaben jede mögliche benannte oder unbenannte Zahl vorstellen kann); die gegebenen Zwischenverhältnisse hingegen seien folgende: 1) $a : b = m : n$; 2) $b : c = o : p$; 3) $c : d = q : r$; 4) $d : e = s : t$ und 5) $e : f = u : v$.

II. Man setze diese Verhältnisse so unter einander, daß immer das zweite Glied des ersten Verhältnisses das erste Glied des unter ihm stehenden zweiten wird u. s. f., so erhält man aus I. Folgendes:

$$a : b = m : n$$
$$b : c = o : p$$
$$c : d = q : r$$
$$d : e = s : t \text{ und endlich}$$
$$e : f = u : v$$

III. In diesen Proportionen bilde man die Producte aus allen gleichnamigen Gliedern, d. h. aus allen ersten, zweiten, dritten und vierten, so geben dieselben folgende neue Proportion: $a \times b \times c \times d \times e : b \times c \times d \times e \times f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t \times v$ (§. 215.).

IV. Das erste Verhältniß dieser Proportion enthält die gemeinschaftlichen Factoren b, c, d und e, welche sich in beiden aufheben (§. 212, I.). Folglich hat man: $a : f = m \times o \times q \times s \times u : n \times p \times r \times t \times v$, wodurch alle Zwischenglieder aus den ersten Verhältnissen der Proportionen in II. hinwegfallen. Allein das letzte Verhältniß ist hier bekannt, weil es aus bekannten Fac-

toren besteht. Folglich ist auch das Verhältniß a : f bestimmt und die Aufgabe hierdurch aufgelöset.

Beispiele. I. Die Aufgabe in §. 275. würde so behandelt, daß man den Ansatz nach §. 276, II. machte, woraus denn nach der Vorschrift der obigen Auflösung folgt, daß

Rchsthlr. : Duc. $= 9 \times 1 \times 1 : 2 \times 3 \times 5$, d. h. Rchsthlr. : Duc. $= 9 : 30 = 3 : 10$. Es ist demnach der Reichsthaler soviel als $\frac{3}{10}$ der Ducate, wobei der Werth dieser letztern gerade zu 5 fl. (ohne das Agio zu rechnen) angenommen worden ist. — Ebenso könnte man sagen, die Ducate betrüge $\frac{10}{3}$ des Reichsthalers.

II. Wie viele Conventionsthaler kostet ein Ballen Schreibpapier, wenn sich der Ballen zum Rieß verhält, wie 10 : 1, der Rieß zum Buche wie 20 : 1, das Buch zum Bogen wie 24 : 1, der Bogen zum Heller wie 3 : 1 (d. h. ein Bogen kostet 3 Heller), der Heller zum Kreuzer wie 1 : 8, der Kreuzer zum Gulden wie 1 : 60 und der Gulden zum Conventionsthaler wie 1 : $2\frac{2}{5}$?

Hier ist der Ansatz dieser:

Ballen	: Rieß	=	10 : 1
Rieß	: Buch	=	20 : 1
Buch	: Bogen	=	24 : 1
Bogen	: Heller	=	3 : 1
Heller	: Kreuzer	=	1 : 8
Kreuzer	: Gulden	=	1 : 60
Gulden	: Conv.-Thlr.	=	1 : $2\frac{2}{5}$.

Ballen : Conv.-Thlr. $= (10 \times 20 \times 24 \times 3) : (8 \times 60 \times 2\frac{2}{5}) = 200 \times 72 : 480 \times \frac{12}{5} = 200 \times 360 : 480 \times 12 = 7200 : 576 = 12\frac{1}{2} : 1$. Daher kostet 1 Ballen dieses Papiers $12\frac{1}{2}$ Conventionsthaler.

§. 278. Zusatz. I. Die zur Kettenregel gehörigen Aufgaben können auch nach dem oben (§. 246, u. f.) bemerkten Reesischen Ansatze aufgelöset werden, was hier noch zu erläutern ist. Die Frage sei diese: Man kauft in England 224 ℔ Kaffee für $5\frac{3}{4}$ Pfund Sterling. Was kostet ein bayerisches Pfund in bayerischem Gelde, da 1 Pfund Sterling mit 11 Guld. 17 Kr. einerlei ist, und 29 englische Pfunde soviel betragen, als 23 bayerische Pfunde?

II. Man sieht leicht, daß sich diese Frage folgendergestalt ordnen läßt: Was kostet ein bayerisches Pfund in Kreuzern, wenn 23 bayerische Pfunde soviel sind als 29 englische Pfunde, wenn 224 englische Pfunde $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterling kosten, und wenn 1 Pf. Sterling soviel als 11 Gulden 17 Kreuzer beträgt?

III. Durch Hülfe der gewöhnlichen Regel Detri läßt sich diese Aufgabe so auflösen, daß man nach und nach folgende drei Fragen beantwortet:

a) Wenn 11 Guld. 17 Kr. soviel als 1 Pf. Sterling betragen, wieviele Gulden und Kreuzer geben $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterlinge? Dieses vierte Glied heiße x.

b) Wenn x Gulden und Kreuzer der Preis von 224 englischen Pfunden ist, was werden 29 englische Pfunde kosten? Diesen neuen Preis nenne man y.

c) Wenn 29 englische Pfunde, oder 23 bayerische Pfunde y Gulden und Kreuzer kosten, was ist der Preis von einem bayerischen Pfunde? Dieser heiße z.

IV. Bildet man nach den bekannten Regeln (§. 221, §. 239 u. s. f.) diese drei Proportionen, so entsteht folgender Ansatz:

a) 1 Pf. St. : $5\frac{3}{4}$ Pf. St. = 11 Guld. 17 Kr. : x
b) 224 engl. ℔ : 29 engl. ℔ = x : y
c) 23 bayer. ℔ : 1 bayer. ℔ = y : z;

Oder in reinen Zahlen:

$$1 : 5\tfrac{3}{4} = 11\tfrac{17}{60} : x$$
$$224 : 29 = x : y$$
$$23 : 1 = y : z,$$

woraus $z = \frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{60}}{23 \times 224 \times 1}$ wird (§. 221.).

V. Da man aus der Natur dieser Aufgabe vier Gleichungen bilden kann; nämlich:

1 Pf. Sterling = 11 Guld. 17 Kr.; 224 engl. ℔ = $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterling; 23 bayer. ℔ = 29 engl. ℔, und z Guld. und Kr. = 1 bayer. ℔, so läßt sich hieraus, nach Reesischer Art, folgender Ansatz bilden:

z Guld. u. Kr. = 1 bayer. ℔
23 bayer. ℔ = 29 engl. ℔
224 engl. ℔ = $5\frac{3}{4}$ Pf. Sterl.
1 Pf. Sterl. = 11 Guld. 17 Kr.,

welcher auf gewöhnliche Art so aufgelöset wird, daß man das Product aller Zahlen zur Rechten des Gleichheitszeichens mit dem Producte aus allen Zahlen zur Linken dieses Zeichen dividirt (§. 249.), wodurch $z = \frac{1 \times 29 \times 5\frac{3}{4} \times 11\frac{17}{60}}{23 \times 224 \times 1}$ wird, wie vorhin in IV.

VI. Wird dieser Werth für z berechnet, so erhält man z in Kreuzern durch den Ausdruck:

$$z = \frac{29 \times \frac{23}{4} \times 677}{23 \times 224} = \frac{29 \times \frac{1}{4} \times 677}{224} = \frac{29 \times 677}{896} = \frac{19633}{896}$$

= 21 Kreuzer, 3 Pfennige und etwas darüber.

§. 279. Zusatz. Man sieht hieraus, wie die Aufgaben der Kettenregel am Ende auf der gewöhnlichen Regel Detri beruhen, und durch sie aufgelöset werden können. Doch gewährt der Kettensatz nach Reesischer Manier eine vorzügliche Bequemlichkeit für das practische Rechnen. Daher sollen hier noch folgende Beispiele (welche aus

der sehr zu empfehlenden Schrift: Die Rechenkunst u. s. w. von J. G. Prändel. Amberg, 1812, entlehnt sind) zur Uebung in dem Ansatze eine Stelle finden.

I. Beispiele. Ein hiesiger Bankier kauft einen Wechselbrief von 12400 Franken. Weil er aber erst nach einiger Zeit zahlbar ist, darf er $2\frac{1}{2}$ Gulden von 100 Gulden rabattiren, d. h. für jedes 100 Gulden nur $97\frac{1}{2}$ Gulden bezahlen. Was muß der Käufer für diesen Wechsel in unserm Gelde erlegen, da 80 Franken so viel als 81 Livres und 24 Livres so viel als 11 Gulden betragen?

Der Ansatz wird dieser:

x Guld. mit Rabatt?	12400 Franken
80 Frank.	81 Livres
24 Livres	11 Gulden
100 Guld.	$97\frac{1}{2}$ mit Rabatt.

Werden nun die Glieder zur Rechten und zur Linken des Senkstrichs gehoben, so findet man x = 5610 Gulden, 30 Kr. $3\frac{3}{4}$ Pf.

II. Beispiel. Der große Solnstein, einer der höchsten Berge Tyrols, mißt bis zu seinem Gipfel $1584\frac{1}{3}$ pariser Toisen. Was beträgt diese Höhe nach bayerischem Maße, da eine Toise so groß ist, als 6 pariser Fuß und 1 pariser Fuß $129\frac{19}{100}$ bayerische Linien enthält, deren 144 einen bayerischen Fuß betragen.

Nennt man die zu findenden bayerischen Fuße x, so ist der Ansatz dieser:

x bayer. Schuhe	=	$1584\frac{1}{3}$ Toisen
1 Toise	=	6 pariser Schuhe
1 pariser Schuh	=	$119\frac{19}{100}$ bayer. Linien
144 bayer. Linien	=	1 bayer. Schuh.

Wird diese Rechnung durchgeführt, so erhält man x = $8528\frac{1}{3}$ bayerische Schuhe.

III. Beispiel. Ein Amberger Wechselhaus hatte Gelegenheit, eine hannövrische Scheidemünze (die man Rössel nennt) einzuwechseln und dieselbe wieder an Ort und Stelle zu senden. Was gewann dasselbe an 100 Gulden, da es für 1 Rössel $7\frac{1}{2}$ Kreuzer gab und in Hannover für 4 Rössel 1 Frank 6 Sols bekam? Bekanntlich betragen 80 Franken so viel als 81 Livres, 24 Livres machen 11 Gulden, und 20 Sols gehen auf einen Franken.

Setzt man den zu suchenden Gewinn an 1 Hundert Gulden = x, so ist der Ansatz dieser:

x	Gulden	=	100 Auslage
1	Gulden	=	60 Kreuzer
$7\frac{1}{2}$	Kreuzer	=	1 Rössel
4	Rössel	=	1 Fr. 6 Sols
20	Sols	=	1 Franke
80	Franken	=	81 Livres
24	Livres	=	11 Gulden.

Das Resultat der ausgeführten Rechnung gibt x = $120\frac{21}{32}$ Gulden; folglich ist $20\frac{21}{32}$ der gesuchte Procentgewinn.

IV. Beispiel. Um in Wechselgeschäften das Steigen und Fallen des Geldes auf drei der vornehmsten Handelsplätze: Hamburg, Amsterdam und Venedig, sicherer beurtheilen zu können, haben die Augsburger Kaufleute den sogenannten Girofuß eingeführt, nach welchem 100 Reichsthaler Girogeld durchgehends 127 Reichsthaler Currentgeld (20 Guldenfuß) ausmachen. Nun sollen nach Hamburg zu einer Zeit, wo 100 Reichsthaler dortiges Bankgeld $116\frac{1}{8}$ Reichsthaler Girogeld werth sind, eine Summe von 2490 Reichsthalern bezahlt werden. Wie viele Gulden rheinisch hat man dazu nöthig? Be-

kanntlich wird 1 Reichsthaler zu $1\frac{1}{2}$ Current und 5 Gulden Current werden zu 6 Gulden rheinisch gerechnet.

Hier ist der Ansatz:

x Guld. rheinisch	=	2490	Rthlr. Bankg.
100 Rthlr. Bankg.	=	$116\frac{1}{8}$	Rthlr. Girog.
100 Rthlr. Girog.	=	127	Rthlr. Curr.
1 Rthlr. Curr.	=	$1\frac{1}{2}$	Guld. Curr.
5 Guld. Curr.	=	6	Gulden rheinisch.

Als Resultat der durchgeführten Rechnung ergibt es sich, daß die 2490 Rthlr. Bankgeld so viel als 6609 Gulden 59 Kr. $3\frac{209}{500}$ rheinisch betragen.

§. 280. Anmerkung. In der bis hierher entwickelten Theorie der Proportionsrechnungen ist der Grund der so höchst mannichfaltigen practischen Anwendung dieser nützlichen Lehre enthalten. Wenn es daher das Bedürfniß des Schülers erfordert, so kann dieses Practische leicht weiter ausgeführt werden.

Ende des ersten Theils.

[illegible]

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz von, 1777-1866

Anleitung zur Elementar-Arithmetik

Bd.: 1

Frankfurt am Main 1841

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.102-a
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739853-9